R

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على أشرف المخلوقين محمد سيد المرسلين وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد ، يسرني أن أقدم لكم هذا العمل المتواضع وهو عبارة على جميع دروس وتمارين

الرياضيات لمستوى الأولى بكالوريا علوم تجريبية مجمعة في كتاب واحد مفهرس

جمعت من موقع

Arabmaths.ift.fr

للأستاذ محمد مستولي

لتصفح أي درس إضغط على عنوانه في الفهرس وكذلك التمارين ، وللرجوع للفهرس إضغط على R

تجميع وترتيب وفهرست

ALMOHANNAD

عضو بمنتديات دفاتر

الفهرس

مبادئ في المنطق

I- تعاريف ومصطلحات

1- العبارة – الدالة العبارية

أ- العبارة

نشاط

ضع العلامة $\times$ في الخانة المناسبة

	نص رياضي	صحيح	خاطئ	لا يمكن الحكم على صحتها أو خطئها بدون نقاش
p	$-8\times -4=-32$			
q	مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي			
r	كل عدد فردي هو عدد أولي			
s	$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$			
t	الدالة $x\to x^2$ حيث $x\in\mathbb{R}$ دالة زوجية			
$p(x;y)$	x و y عنصران من $\mathbb{R}$ / $x\le y$.			
$p(x)$	$(x\in\mathbb{R}):x^2-x\ge 0$			

أ- تعريف

كل نص رياضي يحمل معنى و يكون إما صحيحا و إما خاطئا يسمى عبارة.
نرمز للعبارة بأحد الرموز p أو q أو r........................

أمثلة النصوص p و q و r و s و t عبارات
النصان $p(x;y)$ و $p(x)$ ليس بعبارتين

ب-الدالة عبارية

في النشاط السابق

* اذا عوضنا x و y بعددين معلومين في التعبير x و y عنصران من $\mathbb{R}$ / $x\le y$ نحصل على عبارة.

مثلا من أجل $y=-6$ $x=1$ نحصل على $1\le -6$ عبارة خاطئة
من أجل $y=4$ $x=1$ نحصل على $1\le 4$ عبارة صحيحة
لذا نقول التعبير " x و y عنصران من $\mathbb{R}$ / $x\le y$ " دالة عبارية

* التعبير " $(x\in\mathbb{R}):x^2-x\ge 0$ "دالة عبارية لأن إذا عوضنا x بأي قيمة من $\mathbb{R}$ نحصل على عبارة

مثلا من أجل $x=2$ $2^2-2\ge 0$ عبارة صحيحة

من أجل $x=\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\ge 0$ عبارة خاطئة

تعريف

كل نص رياضي يحتوي على متغير أو (متغيرات) ينتمي(أو تنتمي) إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة يسمى دالة عبارية

2- المكممات – العبارات المكممة

أ- المكمم الوجودي

لتكن $p(x)$; $x\in E$ دالة عبارية

العبارة $(\exists x\in E):\ p(x)$ تعني يوجد على الأقل عنصرا x من E يحقق $p(x)$.

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي .

إذا كان يوجد عنصرا وحيدا x من E يحقق $p(x)$ فإننا نكتب $(\exists! x\in E):\ p(x)$

R

ب- المكمم الكوني

لتكن $p(x)$; $x \in E$ دالة عبارية

العبارة $(\forall x \in E): \ p(x)$ تعني أن جميع عناصر E تحقق $p(x)$. تقرأ لكل x من E , $p(x)$ محقق (أو صحيحة).

الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني.

أمثلة

ضع العلامة $\times$ في الخانة المناسبة

العبارة	خاطئة	صحيحة
$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = -1$	$\times$	
$\exists x \in \mathbb{Z} \quad \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$		$\times$
$\exists! x \in [0;\pi] \quad \cos x = \frac{1}{2}$		$\times$
$\exists! x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4$	$\times$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$		$\times$
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad x - y = 1$	$\times$	

د- العبارات المكممة

لتكن $p(x;y)$ دالة عبارية معرفة على $E \times F$

نطبق أحد المكممين على الخاصية $p(x;y)$ بالنسبة للمتغير x

مثلا المكمم الكوني، نحصل على $(\forall x \in E): \ p(x;y)$

دالة عبارية للمتغير y وهي غير مرتبطة بـ x.

نطبق عليها أحد المكممين بالنسبة للمتغير y. مثلا المكمم الوجودي،

فنحصل على العبارة $p(x;y) \ (\forall x \in E) \ (\exists y \in F)$.

أمثلة

$y^2 = x \ (\exists y \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in \mathbb{R})$ عبارة خاطئة (نأخذ $x = -1$)

$x + y = -2 \ (\exists y \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in \mathbb{R})$ عبارة صحيحة

$x + y = -2 \ (\forall x \in \mathbb{R}) \ (\exists y \in \mathbb{R})$ عبارة خاطئة

$|x+y| \leq |x| + |y| \ (\forall y \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in \mathbb{R})$ عبارة صحيحة.

$x + y = 3 \ (\exists y \in \mathbb{R}) \ (\exists x \in \mathbb{R})$ عبارة صحيحة.

ملاحظة هامة

ترتيب مكممات من نفس الطبيعة ليس له أهمية في تحديد المعنى التي تحمله العبارة المكممة.

ترتيب مكممات من طبيعة مختلفة له أهمية في تحديد المعنى التي تحمله العبارة المكممة

II- العمليات المنطقية

1- نفي عبارة

نشاط: في حوار جرى بين فاطمة و أحمد , أساسه أن كل ما قالته فاطمة ينفيه أحمد و كل ما قاله أحمد تنفيه فاطمة , أنقل الجدول التالي إلى دفترك ثم أملئه :

ما قالته فاطمة	ما قاله أحمد	حكمك على قول فاطمة	حكمك على قول أحمد
$\sqrt{2} \in IN$			
	$\sqrt{7} + \sqrt{2} \prec 5$		
49عدداولي			
	$\sqrt{(-2)^2} = -2$		

R

أ- تعريف

نفي عبارة p هي عبارة نرمز لهابـ $\bar{p}$ أو بـ ┐p تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة. $\bar{p}$ تقرأ نفي p

في جدول الحقيقة: Tableau de vérité

إذا كانت العبارة صحيحة نرمز لصحتها بالرمز 1 أو V وإذا كانت خاطئة نرمز لعدم صحتهاب 0 أو F

جدول حقيقة $\bar{p}$

$\bar{p}$	p
1	1
0	0

أمثلة نفي العبارة $1 \prec \sqrt{2}$ هي العبارة $1 \geq \sqrt{2}$

نفي العبارة $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ هي العبارة $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

ب- نفي عبارة مكممة

* نفي العبارة $\forall x \in E \quad A(X)$ هي العبارة $\exists x \in E \quad \overline{A(X)}$.

* نفي العبارة $\exists x \in E \quad A(X)$ هي العبارة $\forall x \in E \quad \overline{A(X)}$.

* نفي العبارة $(\forall x \in E) \quad (\forall y \in F) \quad A(x;y)$ هي العبارة $(\exists x \in E) \quad (\exists y \in F) \quad \overline{A(x;y)}$

نفي العبارة $(\forall x \in E) \quad (\exists y \in F) \quad A(x;y)$ هي العبارة $(\exists x \in E) \quad (\forall y \in F) \quad \overline{A(x;y)}$

مثال اعط نفي العبارة التالية $(\forall z \succ 0) \quad (\exists x \in]0;1[) \quad (\exists y \in]0;1[): \quad x^2 + y^2 \prec z$

د- نتيجة (الاستدلال بالمثال المضاد)

للبرهان على أن عبارة ما p خاطئة ، يكفي أن نبين أن نفيها $\bar{p}$ صحيحة.

للبرهنة على خطأ $\left[(\forall x \in E): \quad A(x)\right]$ يكفي أن نبرهن صحة $\left[(\exists x \in E): \quad \overline{A(x)}\right]$

تطبيق بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^*): \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$ خاطئة

نعتبر $x = -2$ $\quad -2 + \frac{1}{-2} = \frac{-5}{2} \prec 2$ اذن لدينا $(\exists x \in \mathbb{R}^*): \quad x + \frac{1}{x} \prec 2$ عبارة صحيحة

و منه $(\forall x \in \mathbb{R}^*): \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$ خاطئة

2- الفصل المنطقي

تعريف

فصل العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين p و q صحيحتين . و تكتب (p أو q) نكتبها أيضا $p \vee q$

جدول حقيقة $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ أو $5 \succ 2$ صحيحة

العبارة $2^2 = -4$ أو $-3 \geq 1$ خاطئة

ملاحظة

* العبارتان (p أو q) و (q أو p) تحملان نفس المعنى نقول عملية الفصل تبادلية

* العبارتان r أو $(p$ و $q)$ و $(r$ أو $p)$ أو و q تحملان نفس المعنى، نقول عملية الفصل تجميعية.

3- العطف المنطقي

تعريف

عطف العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا. و تكتب $(p$ و $q)$ نكتبها أيضا $p \wedge q$

جدول حقيقة $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

مثال

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ و $2 \succ 5$ خاطئة

العبارة $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0)$ و $-3 \prec 1$ صحيحة

ملاحظة

* العبارتان $(p$ و $q)$ و $(q$ و $p)$ تحملان نفس المعنى نقول عملية العطف تبادلية
* العبارتان r و $(p$ و $q)$ و $(r$ و $p)$ و q تحملان نفس المعنى، نقول عملية العطف تجميعية.
* $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ $\quad$ $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$ بين ذلك

4- الاستلزام

تعريف

استلزام العبارتين p و q هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة. و تكتب $p \Rightarrow q$ أقرأ p تستلزم q

جدول حقيقة $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

أمثلة

العبارة $4+1=5 \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0)$ صحيحة

العبارة $2 \succ 1 \Rightarrow -1 = 2+3$ خاطئة

العبارة $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5-1=20$ صحيحة

العبارة $(\forall \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0) \Rightarrow 2-1=1$ صحيحة

اصطلاح إذا كانت العبارة $p \Rightarrow q$ صحيحة ، نقول إن q استنتاج منطقي للعبارة p.

ملاحظة

* العبارتان $p \Rightarrow q$ و $(\bar{p} \vee q)$ تحملان نفس المعنى
* $q \Rightarrow p$ يسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $p \Rightarrow q$.
* للبرهنة على أن $p \Rightarrow q$ صحيحة ، يكفي أن نفترض أن p صحيحة و نبين أن q صحيحة.
نقول إن p شرط كاف لتحقيق q

تمرين تطبيقي

ليكن $x \in \mathbb{R}$

R

بين أن $-2 \le x \le \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-3x+5}{x+4} \le \frac{11}{2}$

(نفترض أن $-2 \le x \le \frac{1}{3}$ و نبين أن $\frac{-3x+5}{x+4} \le \frac{11}{2}$)

5- التكافؤ المنطقي

تعريف

ليكن p و q عبارتين
العبارة ($p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$) تسمى تكافؤ العبارتين p و q وتكون صحيحة إذا كانت p و q لهما نفس قيم الحقيقة و نرمز لها بـ $p \Leftrightarrow q$ و تقرأ p تكافئ q أو p إذا وفقط إذا q أو p شرط لازم و كاف لتحقيق q

جدول حقيقة $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

أمثلة العبارة (5 عدد فردي $\Leftrightarrow 3 \succ 2$) صحيحة
العبارة (1- عدد موجب $\Leftrightarrow 5+2=3$) صحيحة
العبارة ($2 \succ 1 \Leftrightarrow -1 \in \mathbb{N}$) خاطئة

ملاحظة

* $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ نقول إن التكافؤ عملية تبادلية

* $(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$ نقول إن التكافؤ عملية تجميعية

تمرين

نقترح عليك برهانين نستعمل فيهما الرمز " $\Leftrightarrow$ " بطريقة مسترسلة . أحد البرهانين خاطئ. و المطلوب منك التعرف عليه مع إعطاء تعليل لجوابك.

1) ليكن x من IR لدينا : $\sqrt{x^2+3} \ge 2 \Leftrightarrow x^2+3 \ge 4$

$\Leftrightarrow x^2 \ge 1$

$\Leftrightarrow x \ge 1$

2) ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا : $x+\frac{1}{x} \ge 2 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}-2 \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \ge 0$

تمرين

باستعمال جداول الحقيقة بين أن

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$ و $(\overline{p} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

$\overline{p \Rightarrow \overline{q}} \Leftrightarrow (p \wedge q)$ صحيحة

III- القوانين المنطقية

كل عبارة مكونة من عبارتين أو عدة عبارات $p;q;r...$ مرتبطة بينها بالعمليات المنطقية و تكون صحيحة مهما كانت العبارات $p;q;r...$ تسمى قانونا منطقيا

1- أنشطة

بين أن العبارات التالية قوانين منطقية

$p \vee \overline{p}$ ، $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ ، $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

ملاحظة و اصطلاح

* لدينا $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ قانون منطقي و يسمى القاعدة العامة للاستدلال الاستنتاجي .
للبرهان على صحة العبارة q
نبين أن الاستلزام $p \Rightarrow q$ صحيحا حيث p عبارة ما صحيحة، ثم نستنتج أن q صحيحة.

* لدينا $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ قانون منطقي نقول إن الاستلزام عملية متعدية.

2- بعض القوانين المنطقية

*أ- قوانين موركان LOIS DE MORGAN

العبارات التالية قوانين منطقية
$\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ $\qquad$ $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

تطبيق حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

الحل

$$(x;y) \in S \Leftrightarrow 2x - y = 2 \wedge (x - y = 0 \vee x + y = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y = 2 \wedge x - y = 0) \\ \vee (2x - y = 2 \wedge x + y = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \wedge y = 2) \vee \left(x = \frac{2}{3} \wedge y = -\frac{2}{3}\right)$$

اذن $S = \left\{(2;2);\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)\right\}$

تمرين

اعط نفي العبارات $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + 1 \geq 0 \quad \vee \quad x^2 - 1 \prec 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (x;y) \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x+y}{1+xy} \leq 1$$

*ب- قانون التكافؤات المتتالية

العبارة $[(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)] \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ قانون منطقي

نتيجة (الاستدلال بالتكافؤات المتتالية)

نستنتج من هذا القانون أنه اذا كان $(A \Leftrightarrow B)$ و $(B \Leftrightarrow C)$ فان $(A \Leftrightarrow C)$ صحيحا.

تمرين

ليكن $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

بين أن $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x;y) = (2;8)$

* د- قانون الاستلزام المضاد للعكس

العبارة $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ قانون منطقي

ملاحظة

في بعض الأحيان يصعب البرهان على صحة $A \Rightarrow B$
فنلجأ الى البرهان على صحة $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ ثم نستنتج صحة $A \Rightarrow B$
هذا البرهان يسمى الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

R

تمرين ليكن $x \in \mathbb{R}$

بين أن $x \neq -8 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5} \neq 2$

نتيجة

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B})$ قانون منطقي

*ج- قانون الخلف

$((\overline{B} \Rightarrow \overline{C}) \wedge (\overline{B} \Rightarrow C)) \Rightarrow B$ قانون منطقي

نتيجة (الاستدلال بالخلف)

نفترض أن $\overline{B}$ صحيحة ، ونبين أن $\overline{B} \Rightarrow \overline{C}$ صحيحة(أي $\overline{C}$ صحيحة) حيث Cعبارة ما صحيحة (أي $\overline{B} \Rightarrow C$ صحيحة)

و هذا تناقض لأن C لا يمكن أن تكون صحيحة و خاطئة في نفس الوقت .ثم نستنتج أن B صحيحة.

هذا نوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالخلف.

تمرين برهن أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

* ر- قانون فصل الحالات

$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow C]$ قانون منطقي

ملاحظة

إذا كانت $A \vee B$ صحيحة فانه للبرهنة على صحة C ، نبين أن $A \Rightarrow C$ صحيحة و $B \Rightarrow C$ صحيحة ،

ثم نستنتج أن C صحيحة.

هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بفصل الحالات

عمليا نطبق $\left[(A \Rightarrow C) \wedge (\overline{A} \Rightarrow C)\right] \Rightarrow C$ لأن $A \vee \overline{A}$ صحيحة دائما.

تمرين حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 - |x-1| + 1 = 0$

VI- مبدأ الترجـــع

خاصية

لتكن $p(n)$ خاصية لمتغير n صحيح طبيعي إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون العبارة $p(n_0)$ صحيحة . و إذا كانت العبارة $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ $\forall n \geq n_0$ صحيحة. فان العبارة $(\forall n \geq n_0) : p(n)$ صحيحة.

ملاحظة

للبرهان على أن $(\forall n \geq n_0) : p(n)$ صحيحة، نتبع الخطوات التالية

- التحقق:
  نتحقق أن العبارة $p(n_0)$ صحيحة
- افتراض الترجع:
  نفترض أن العبارة $p(n)$ صحيحة $n \geq n_0$ و نبين أن $p(n+1)$ صحيحة.

هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بالترجع

تمرين بين بالترجع $2^n \geq n^2$ $\forall n \geq 4$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

R

تمارين في المنطق

تمرين1

لتكن p و q و r عبارات

هل العبارات التالية قوانين منطقية

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$$

$$\overline{(p \Leftrightarrow q)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{p} \Leftrightarrow q)}$$

$$[p \Rightarrow q \vee \overline{r}] \Leftrightarrow (q \vee (p \Rightarrow r))$$

تمرين2

أوجد العبارات النافية للعبارات التالية

$$\forall x \in E \quad p(x) \vee \overline{q(x)}$$

$$\exists x \in E \quad p(x) \wedge q(x)$$

$$\exists x \in E \quad p(x) \Rightarrow \overline{q(x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - |x| + 2 \geq 0 \quad \wedge \quad x \in]-2;2[$$

تمرين3

ليكن $a \in \mathbb{R}_+^*$

باستعمال الاستدلال بالتكافؤات المتتالية بين أن $a + \frac{1}{a} \geq 2$

تمرين4

1- بين أن

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 \quad a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \wedge \quad b = 0$$

2- حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة $2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y$

تمرين5

لتكن x و y و z أعداد حقيقية

بين أن $x + y \succ 2z \Rightarrow (x \succ z \quad \vee \quad y \succ z)$

تمرين6

بين أن $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

تمرين7

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

بين بالترجع $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

تمرين8

ليكن $a \in \mathbb{R}_+^*$

بين بالترجع $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+a)^n \geq 1 + na$

تمرين9

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

1- بين أن $3^{2n} - 2^n$ تقبل القسمة على 7

2- بين أن $3^{2n} + 2^{6n-5}$ قابل للقسمة على 11

3- بين أن $4^n + 6n - 1$ تقبل القسمة على 9

عموميات حول الدوال العددية

أنشطة

أنشطة تذكيرية

نشاط1

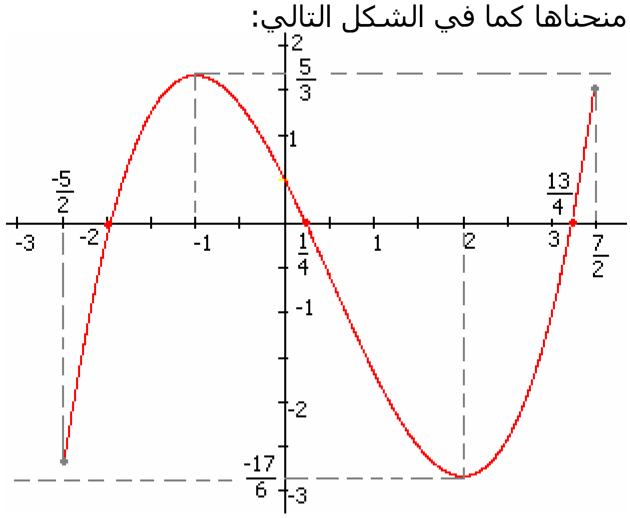
حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغير الحقيقي في الحالات التالية:

أ/ $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x^2-x+2}$ ب/ $f(x)=\sqrt{1-2x}$

ج/ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{2x-1}$

نشاط2

لتكن f دالة عددية معرفة على $\left[\frac{-5}{2};\frac{7}{2}\right]$ و (C) منحناها كما في الشكل التالي:



1- حدد القيمة القصوى و القيمة الدنيا لدالة f على المجال $\left[\frac{-5}{2};\frac{7}{2}\right]$

2- استنتج أن $\frac{-17}{6}\le f(x)\le\frac{5}{3}$ $\forall x\in\left[\frac{-5}{2};\frac{7}{2}\right]$

3- حل مبيانيا أ- $f(x)=0$ ب- $f(x)\ge 0$

4- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=1$

نشاط3

I/ لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x)=x^2-2x$

و C_f منحنى الدالة f في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- تأكد أن $f(x)=(x-1)^2-1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

أ/ بين أن المنحنى C_f صورة المنحنى (C) الممثل للدالة المعرفة بـ $x\to x^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1;-1)$

ب/ حدد طبيعة C_f و أنشئه

II/ لتكن g دالة عددية لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$g(x)=x|x|-2x$

1- بين أن f دالة فردية

2- حدد جدول تغيرات الدالة f

3- أنشئ C_g في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

نشاط4

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$f(x)=\dfrac{-2x-1}{x-1}$

و C_f منحنى الدالة f في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ- حدد D_f

ب- تحقق أن $f(x)=-2+\dfrac{-3}{x-1}$ لكل x من D_f

2- أ- بين أن C_f صورة المنحنى (C) الممثل للدالة المعرفة بـ $x\to\dfrac{-3}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1;-2)$

ب- أنشئ C_f

3- نعتبر g الدالة المعرفة بـ $g(x)=\dfrac{-2|x|-1}{|x|-1}$

أ- حدد D_g و أدرس زوجية g

ب- أنشئ C_g

نشاط5

لتكن f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$f(x)=\dfrac{3x-2}{2x-1}$ و $g(x)=\dfrac{-2x+1}{x+1}$

1- أعط جدول تغيرات كل من f و g

2- حدد طبيعة C_f و C_g مع إعطاء عناصرها المميزة

أنشطة التقدم

نشاط6 (دالة مكبورة- دالة مصغورة – دالة محدودة)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

1- بين بين أن $f(x)\prec 2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2- أ/ بين أن $1\le f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ب/ حل المعادلة $f(x)=1$ $x\in\mathbb{R}$

3- استنتج أن $1\le f(x)\prec 2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

نشاط7 (مقارنة دالتين)

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي

المعرفتين بـ $f(x)=x^2-3x$; $g(x)=\dfrac{-x+3}{x+2}$

C_f و C_g المنحنيين الممثلين لـ f و g على

التوالي في مستوى منسوب إلى معلم م.م.

1- حدد تقاطع C_f و C_g.

2- أنشئ C_f و C_g.

3- حل مبانيا المتراجحة $f(x)\geq g(x)$

4- تحقق جبريا من حلول المتراجحة $f(x)\geq g(x)$

نشاط8 (الدالة الدورية)

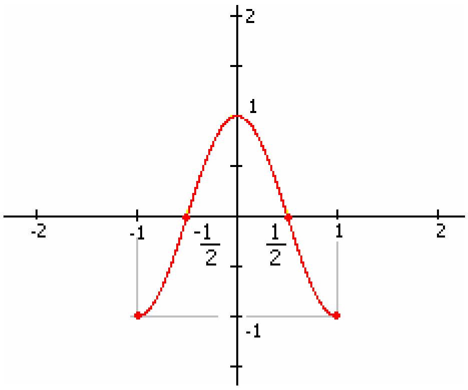
لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$f(x)=\cos(\pi x)$

1- بين أن $f(x+2)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

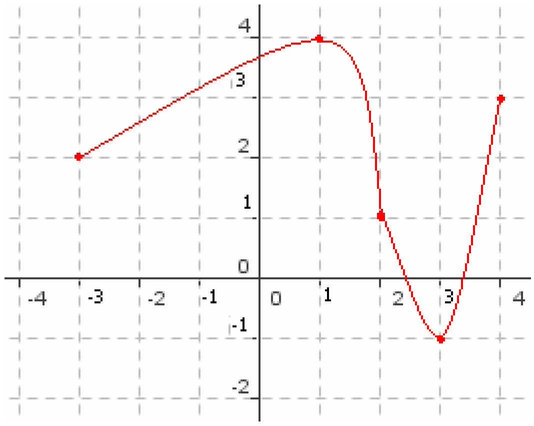
2- أنشئ جزء المنحنى الدالة f على المجال $[-6;6]$ علما أن جزء المنحنى الدالة f

على المجال $[-1;1]$ كما يلي



نشاط9 (صورة مجال)

الشكل التالي يمثل دالة عددية معرفة على المجال $[-3;4]$



1- أ/ بين أن $1\leq f(x)\leq 4$ $\forall x\in[-3;2]$

ب/ ليكن $y\in[1;4]$

بين أن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا في $[-3;2]$

ج/ استنتج أن $f([-3;2])=[1;4]$

2- حدد مبانيا صورة المجال $[-3;1]$ ثم $[2;4]$

نشاط10(مركب دالتين)

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي

المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=-x+2$

1- أحسب $g(3)$ و $g(6)$ و $g\left(\dfrac{7}{4}\right)$ ثم أحسب

$f(g(3))$ و $f(g(6))$ و $f\left(g\left(\dfrac{7}{4}\right)\right)$

2- حدد مجال I بحيث لكل x من I يمكن حساب $f(g(x))$ حدد $f(g(x))$ لكل x من I

نشاط11(التمثيل المبياني لدالة $x\to\sqrt{x+a}$)

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي

المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=\sqrt{x+1}$

1- حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g

2- أدرس تغيرات كل من f و g

3- أ/ أتمم الجدول التالي

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	$\frac{9}{4}$	4
$f(x)$						

ب/ مستعينا بالجدول أنشئ (C_f)

4- أ/ بين أن المنحنى (C_g) صورة المنحنى (C_f)

بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2;0)$

ب/ أنشئ (C_g)

نشاط12(التمثيل المبياني لدالة $x\to ax^3$)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$f(x)=2x^3$

1- بين أن f فردية

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيرات f

3- أ/ أتمم الجدول التالي

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$						

ب/ أنشئ (C_f)

بالإتباع نفس الخطوات مثل مبانيا

الدالة $g(x)=-x^3$

عموميات حول الدوال العددية

I – تذكير

A -1/ الدالة الزوجية- الدالة الفردية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

* نقول ان f دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان : * لكل x من D_f $-x \in D_f$

* لكل x من D_f $f(-x) = f(x)$

* نقول إن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان : * لكل x من D_f $-x \in D_f$

* لكل x من D_f $f(-x) = -f(x)$

ب- التأويل الهندسي

خاصية

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

*- تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل للمنحنى C_f

*- تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

2- تغيرات دالة

a- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \leq f(x_2)$
- تكون f تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \prec f(x_2)$
- تكون f تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \geq f(x_2)$
- تكون f تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \succ f(x_2)$

b- معدل التغير

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و x_1 و x_2 عنصرين مختلفين D_f

العدد $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x_1 و x_2.

ب- معدل التغير و الرتابة

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f و $T = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ معدل تغير الدالة f بين x_1 و x_2.

- تكون f تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $T \geq 0$
- تكون f تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $T \succ 0$
- تكون f تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $T \leq 0$
- تكون f تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $T \prec 0$

c- الرتابة وزوجية دالة

خاصية

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $(J = \{-x \,/\, x \in I\})$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تناقصية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تزايدية على J.

خاصية

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x / x \in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تزايدية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تناقصية على J.

ملاحظة: لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

3- مطاريف دالة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال I و a عنصر من I

- نقول إن $f(a)$ هو القيمة القصوى لـ f على مجال I إذا كان $f(x) \le f(a)$ $\forall x \in I$ نكتب $f(a)=\underset{x\in D_f}{Max}\, f(x)$
- نقول ان $f(a)$ هو القيمة الدنيا لـ f على مجال I إذا كان $f(x) \ge f(a)$ $\forall x \in I$ نكتب $f(a)=\underset{x\in D_f}{Min}\, f(x)$

ب- خاصية

ليكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a \prec b \prec c$ و f دالةعددية لمتغير حقيقي

إذا كانت f تزايدية على $[a;b]$ و تناقصية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند b

إذا كانت f تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة دنيا عند b

B / - دراسة بعض الدوال الاعتيادية

1- الدالة الحدودية من الدرجة الثانية

خاصيات

لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a \neq 0$

* يوجد عددان حقيقيان α و β حيث $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ لكل x من $\mathbb{R}$ هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f

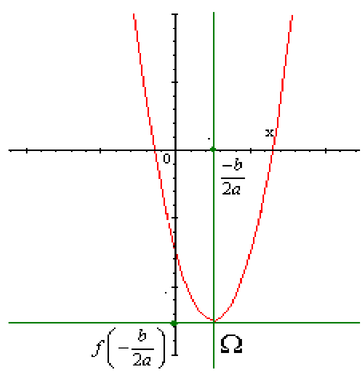
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to ax^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha;\beta)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x=\alpha$

ملاحظة: $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ و $\beta=f(\alpha)$

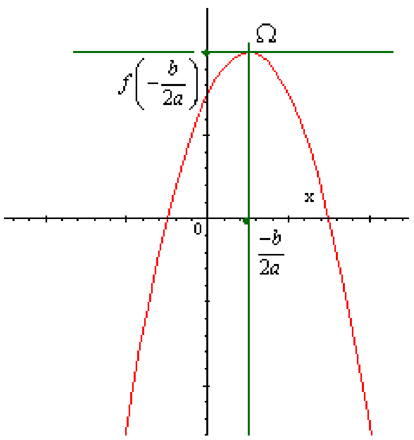
*- إذا كان $a \succ 0$ فان:

x	$-\infty$ $\dfrac{-b}{2a}$ $+\infty$
f	$\searrow$ $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ $\nearrow$



* إذا كان $a \prec 0$ فان:

x	$-\infty$ $\dfrac{-b}{2a}$ $+\infty$
f	$\nearrow$ $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ $\searrow$



2- الدالة المتخاطة

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

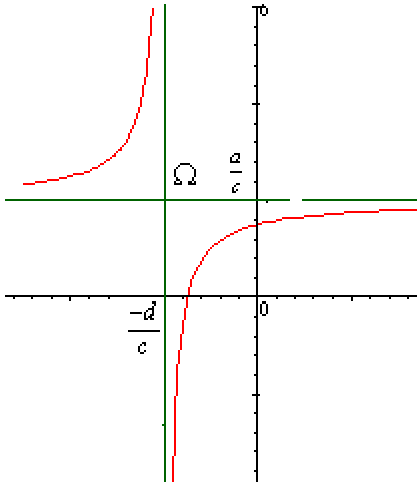
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to\frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان بـ $x=\alpha$ و $y=\beta$

ملاحظة: $\alpha=\frac{-d}{c}$ و $\beta=\frac{a}{c}$

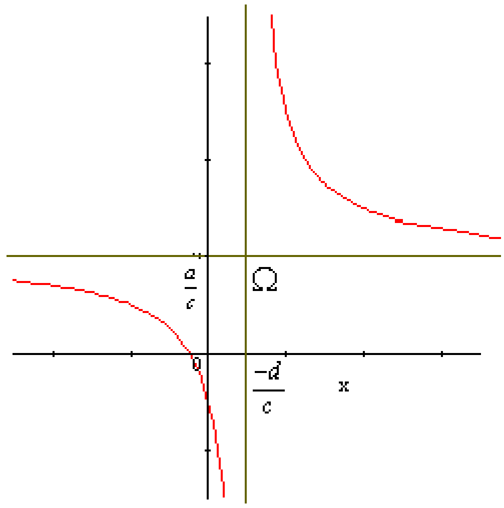
*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\succ 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↗	‖	↗



*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\prec 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↘	‖	↘



II– الدالة المكبورة –الدالةالمصغورة – الدالة المحدودة

1/ نشاط6

2/ تعاريف

لتكن f دالة معرفة على مجال I

*- نقول إن f مكبورة على I اذا وجد عدد حقيقي M حيث: $f(x)\leq M$ لكل x من I

*- نقول إن f مصغورة على I اذا وجد عدد حقيقي m حيث: $f(x)\geq m$ لكل x من I

*- نقول إن f محدودة على I اذا وجد عددين M و m حيث: $m\leq f(x)\leq M$ لكل x من I

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I

نقول إن f محدودة على I اذا وجد عدد حقيقي موجب s حيث: $|f(x)|\leq s$ لكل x من I

تمرين

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة ب $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$

R

1- حدد D_f

2- بين أن الدالة مكبورة على $]2,+\infty[$ بالعدد 2 و مصغورة على $]2,+\infty[$ بالعدد1

III– مقارنة دالتين- التأويل الهندسي

1/ نشاط7

2/ أ/ تساوي دالتين

- تعريف

نعتبر f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g مجموعتي تعريفهما على التوالي
نقول إن f تساوي g و نكتب $f = g$ اذا و فقط اذا كان: * $D_g = D_f$ و * $f(x) = g(x)$ مهما كانت x من D_f

ب/ مقارنة دالتين

- تعريف

نعتبر f و g دالتين معرفتين مجال I
نقول إن f أصغر أو تساوي g على I اذا كان: $f(x) \le g(x)$ مهما كانت x من I نكتب $f \le g$ على I

ج/ التأويل الهندسي

$f \le g$ على I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f تحت منحنى g على I

د/ الدالة الموجبة- الدالة السالبة

نعتبر f دالة معرفة على مجال I
* f دالة موجبة على I $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{I} \, ; f(x) \ge 0)$
* f دالة سالبة على I $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{I} \, ; f(x) \le 0)$

IV– الدالة الدورية

1- نشاط8

2- تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث
$\forall x \in D_f \qquad x+T \in D_f \, ; \quad x-T \in D_f \qquad f(x+T) = f(x)$
العدد T يسمى دور لدالة f .اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالةf

أمثلة

* الدالتان $x \to \cos x$ و $x \to \sin x$ دوريتان و دورهما 2π * الدالة $x \to \tan x$ دورية دورها π

* الدالتان $x \to \cos ax$ و $x \to \sin ax$ (حيث $a \ne 0$) دوريتان و دورهما $\dfrac{2\pi}{|a|}$

* الدالة $x \to \tan ax$ (حيث $a \ne 0$) دورية دورها $\dfrac{\pi}{|a|}$

3- خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $\qquad f(x+nT) = f(x) \qquad \forall x \in D_f , \forall n \in \mathbb{Z}$

4- ملحوظة

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فانه:

- يكفي دراسة الدالةf على $D_f \cap [0,T[$ أو $D_f \cap \left[\dfrac{-T}{2},\dfrac{T}{2}\right[$
- يستنتج جزء منحنى الـدالة f على $D_f \cap \left[\dfrac{-T}{2}+nT;\dfrac{-T}{2}+(n+1)T\right[$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ من جزئ منحنى على $D_f \cap \left[\dfrac{-T}{2},\dfrac{T}{2}\right[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(nT;0)$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

V– صورة مجال بدالة

1- نشاط9

2- تعريف

لتكن f دالة عددية للمتغير حقيقي و I مجال ضمن من D_f
صورة المجال I بالدالة f هي مجموعة جميع صور عناصر I بالدالة f نرمز له بـ $f(I)$
$f(I) = \{ f(x) / x \in I \}$

ملحوظة:

* $y \in f(I) \Leftrightarrow \exists x \in I \quad / f(x) = y$

* f دالة عددية و I مجال ضمن من D_f J مجال ضمن $\mathbb{R}$

$$f(I) \subset J \Leftrightarrow \forall x \in I \quad \exists y \in J \quad / f(x) = y$$

$$J \subset f(I) \Leftrightarrow \forall y \in J \quad \exists x \in I \quad / f(x) = y$$

VI– مركب دالتين

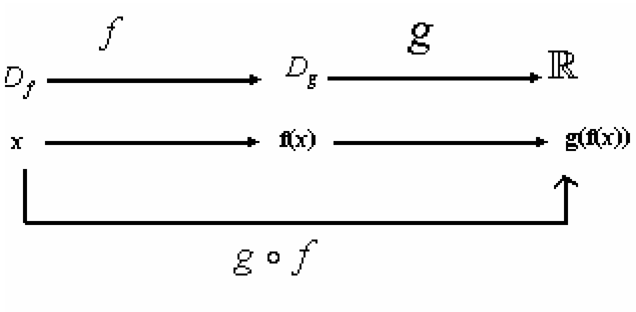
1- نشاط10

2- تعريف

لتكن f و g دالتين حيث $f(D_f) \subset D_g$

مركبة الدالتين f و g في هذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $g \circ f$ حيث لكل $x \in D_f$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$



مجموعة تعريف $g \circ f$:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\}$$

تمرين

لتكن $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = 2x - 1$

حدد $g \circ f$ و $f \circ g$ ثم قارنهما

ملاحظة : على العموم $g \circ f \neq f \circ g$

تمرين $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad ; \quad g(x) = 2x - 1$ $\qquad h(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 1}{8x^2 - 8x + 1}$

1- حدد $f \circ g \ ; g \circ f \ ; h \circ g$

2- حدد دالة t حيث $h = t \circ g$

3 - حدد دالة l حيث $f = l \circ g$

3 - مركب دالتين و الرتابة

لتكن f و g دالتين و I و J مجالين ضمن D_f و D_g على التوالي حيث $f(I) \subset J$

- إذا كان f تزايدية على I و g تزايدية على J فان $g \circ f$ تزايدية على I
- إذا كان f تناقصية على I و g تناقصية على J فان $g \circ f$ تزايدية على I
- إذا كان f تزايدية على I و g تناقصية على J فان $g \circ f$ تناقصية على I
- إذا كان f تناقصية على I و g تزايدية على J فان $g \circ f$ تناقصية على I

تمرين

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$f(x) = 3x - 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 + 1$$

باستعمال تغيرات f و g حدد تغيرات $f \circ g$ و $g \circ f$

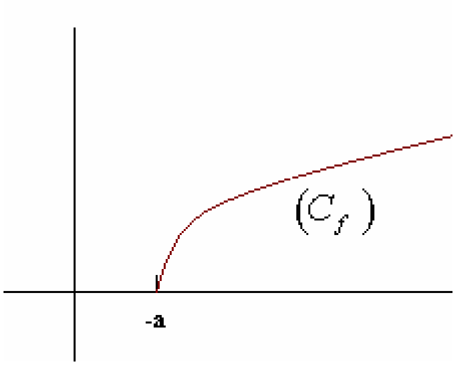
VI– تمثيل الدالتين $x \to ax^3$ و $x \to \sqrt{x+a}$

1- الدالة $x \to \sqrt{x+a}$

نشاط11

خاصية

الدالة $f : x \to \sqrt{x+a}$ معرفة و تزايدية قطعا على $[-a;+\infty[$



أمثلة : في نفس المعلم أنشئ C_f من أجل $a=0$ و $a=2$ و $a=-1$

تمرين

لتكن f و g الدالتين المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{-x^2+1}$

1- أعط جدول تغيرات f و أنشئ (C_f)

2- حدد D_g ثم حدد تغيرات الدالة g باستعمال مركب دالتين

2- الدالة $x \to ax^3$

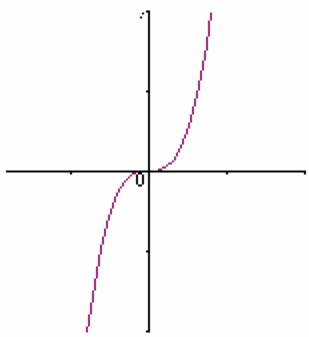
نشاط12

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x)=ax^3$ و $a \in \mathbb{R}^*$

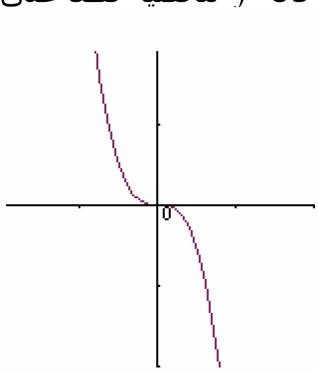
*- إذا كان $a \succ 0$ فان f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

*- $a \succ 0$



*- إذا كان $a \prec 0$ فان f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

*- $a \prec 0$



سلسلة:عموميات حول الدوال

Moustaouli Mohamed
2007 - 2008

تمرين1

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي حيث
$$f(x)=x+\sqrt{x^2-x}$$

1- حدد D_f

2- بين أن f مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$ على $]-\infty;0[$

تمرين2

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ
$$f(x)=\frac{|x|+1}{x^2+1}$$

1- بين أن f زوجية.

2- أ- بين أن f محدودة على $[1;+\infty[$

ب- بين أن f مصغورة بالعدد 1 على $[-1;0]$

3- أدرس رتابة f على كل من $]-1+\sqrt{2};+\infty[$ و $\left[0;-1+\sqrt{2}\right]$ ثم أعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

استنتج مطاريف الدالة f.

تمرين3

نعتبر f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي حيث
$$f(x)=x^2-2x \quad ; \quad g(x)=\frac{-2x-1}{-2x+1}$$

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة g

2 - أعط جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

3- أ) حدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ج) أنشئ المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

4- أ) بين أن
$$\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\} \quad g(x)=f(x)\Leftrightarrow -2x^3+5x^2+1=0$$

ب) بين مبيانيا أن المعادلة $-2x^3+5x^2+1=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\frac{5}{2}\prec\alpha\prec 3$

ج) حل مبيانيا المتراجحة $f(x)\geq g(x)$

د) حدد مبيانيا $f(]-1;2])$

5- نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x حيث
$$h(x)=\frac{x-2x\sqrt{x}}{x^2}$$

أ) تأكد أن $h(x)=f\circ t(x)$ $\forall x\in]0;+\infty[$ حيث
$$t(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

ب) بين أن t تناقصية على $]0;+\infty[$

ج) بين جبريا أن $t(]1;+\infty[)=]0;1[$

د) باستعمال مركب دالتين حدد رتابة h على $]1;+\infty[$

تمرين4

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ $g(x)=x^3-1 \quad ; \quad f(x)=\sqrt{x+2}$

C_f و C_g المنحنيين الممثلين لـ f و g على التوالي في مستوى منسوب إلى معلم م.م.

1- أعط جدول تغيرات كل من f و g

2- أنشئ C_f و C_g.

3- بين مبيانيا أن المعادلة $x^3-\sqrt{x+2}-1=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1\prec\alpha\prec\frac{3}{2}$

تمرين5

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ
$$g(x)=-3x^2-2x+1 \quad ; \quad f(x)=\frac{-3x+1}{2x+1}$$

1- تأكد أن $\frac{1}{3}$ حل للمعادلة $f(x)=g(x)$

2- أنشئ C_f و C_g.

3- أ- حدد مبيانيا
$$f\left(\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[\right) \quad ; \quad f\left(\left]\frac{-1}{2};1\right[\right)$$
$$g\left(\mathbb{R}^+\right) \quad ; \quad g\left(]-2;-1[\right) \quad ; \quad g\left(\left]-1;\frac{1}{3}\right[\right)$$

4- حدد جبريا $g\left(\left]-1;\frac{1}{3}\right[\right) \quad ; \quad f\left(\left]\frac{-1}{2};1\right[\right)$

تمرين6

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ
$$f(x)=\sqrt{x-2}$$

بين مبيانيا أن $f([3;+\infty[)=[1;+\infty[$ ثم بين ذلك جبريا

تمرين7

f الدالة العددية معرفة بجدول تغيراتها التالي

x	-2		0		1		5
f	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3

حدد $f[-2;0]$ و $f[1;5]$ و $f[0;5]$ و $f[-2;1]$ و $f[-2;5]$

سلسلة: عموميات حول الدوال

Moustaouli Mohamed

2007 - 2008

تمرين8

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$g(x)=x^2+1 \quad ; \quad f(x)=3x-1$$

1- حدد $f\circ g$; $g\circ f$

2- باستعمال تغيرات f و g حدد تغيرات $f\circ g$ و $g\circ f$

تمرين7

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ $f(x)=\frac{-x}{x+2} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x+1}$

1- حدد D_f و D_g ثم استنتج $D_{g\circ f}$

2- حدد تغيرات f و g ثم استنتج تغيرات $g\circ f$

تمرين9

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

1- حدد D_f

2- أدرس تغيرات f على كل من المجالات $[1;+\infty[$ و $]-1;1]$ و $]-\infty;-1[$ (باستعمال مركبة دالتين)

تمرين10

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-\pi;\pi]$ ب $f(x)=\cos x$

1- أعط جدول تغيرات f

2- نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x)=2\cos^2 x-2\cos x$

أ/ حدد دالة g حيث $h(x)=g\circ f(x)$

ب/ أعط جدول تغيرات g

ج/حل المتراجحة $\cos x\geq\frac{1}{2}$ $\quad x\in]-\pi;\pi]$

د/ باستعمال مركبة دالتين أدرس تغيرات الدالة h

تمرين11

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x+1} \quad ; \quad g(x)=-x^2+2x+2$

1- ضع جدول تغيرات كل من f و g

2- أحسب $g\circ f(x)$ لكل x من $[-1;3]$

3- أدرس تغيرات $g\circ f$ على $[-1;3]$

تمرين12

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بـ

$$f(x)=\sqrt{x-3} \quad ; \quad g(x)=\frac{x-3}{x+3}$$

1- حدد D_f ; D_g ثم حدد $D_{g\circ f}$

2- أنشئ C_f ; C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم

3- أ- حل مبيانيا $g(x)\prec 0$

ب- حل مبيانيا $g(x)\succ f(x)$

4- نعتبر الدالة العددية h المعرفة بـ $h(x)=\frac{\sqrt{x-3}-3}{\sqrt{x-3}+3}$

أ- بين أن h مكبورة بالعدد 1 و أن- قيمة دنيا مطلقة لـ h

ب- استنتج تغيرات الدالة h.

تمرين13

$$f(x)=2x^2+3x+1 \quad ; \quad g(x)=2x-1$$

$$h(x)=\frac{4x^2-4x-1}{8x^2-8x+1}$$

1- حدد $f\circ g$; $g\circ f$; $h\circ g$

2- حدد دالتين t و l حيث $h=t\circ g$ و $f=l\circ g$

تمرين14

نعتبر f و g الدوال العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$f(x)=x+2-\sqrt{x+2} \quad ; \quad g(x)=x^2-x$$

$$h(x)=\sqrt{x+2}$$

1- أ/ حدد D_f

ب/ بين أن $f(x)\geq-\frac{1}{4}$ $\quad \forall x\in D_f$

ج/ حل المعادلة $f(x)=2$

2- أ/ حدد تغيرات h و أنشئ C_h

ب/حدد مبيانيا $h([-2;0])$ و $h([2;+\infty[)$

ج/ أعط جدول تغيرات g

د/ تحقق أن $f(x)=g\circ h(x)$ $\quad \forall x\in D_f$

استنتج رتابة f على كل من $\left[-2;-\frac{7}{4}\right]$ و $\left[-\frac{7}{4};+\infty\right[$

تمرين15

تصنع شركة منتوجا A اذا علمت أن كل وحدة من المتوج A تباع بثمن 400 درهم و مصروف x وحدة من المنتوج A محددة بالعلاقة $C(x)=0,02x^2+160x+400$

1- حدد عدد الوحدات المصنوعة من المنتوج A لكي يكون الربح قصويا

2- ما قيمة هذا الربح

تمرين16

اشترى شخص قطعة أرضية مستطيلة الشكل محيطها 200 متر بثمن إجمالي P_T

حدد بعدي هذه القطعة لكي يكو ثمن المتر مربع دنويا.

المرجح

القدرات المنتظرة

ـ استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛
ـ إنشاء مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$؛
ـ استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛
ـ استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛
ـ استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.

I- مرجح نقطتين

1- النقطة المتزنة

تعريف

لتكن A نقطة من المستوى و α عددا حقيقيا
الزوج $(A;\alpha)$ يسمى نقطة متزنة. نقول كذلك النقطة A معينة بالمعامل α. أو العدد α وزن النقطة A.

2- مرجح نقطتين

أنشطة

I) لتكن A و B نقطتين مختلفتين
1- بين أنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها
2- بين أنه توجد نقطة وحيدة G حيث $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها

II) لتكن A و B نقطتين مختلفتين و α و β عددين حقيقيين غير منعدمين
1- بين اذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فان توجد نقطة وحيدة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
2- إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فانه لا توجد أية نقطة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ نقطتين متزنتين من المستوى حيث $\alpha + \beta \neq 0$.
توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فان النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ لا تقبلان مرجحا.

3- مركز ثقل نقطتين

تعريف

مركز ثقل نقطتين A و B هو مرجح A و B المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصية

مركز ثقل نقطتين A و B هو منتصف $[AB]$

4-الصمود

ليكن $k \in \mathbb{R}^*$

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; $\alpha + \beta \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; $k\alpha + k\beta \neq 0$

$\Leftrightarrow$ G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;k\alpha)$ و $(B;k\beta)$

خاصية

مرجح نقطتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

تمرين

حدد α و β حيث G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ في الحالتين
أ- $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = 5\overrightarrow{AB}$
ب- A مركز ثقل G و B.

R

-5 الخاصة المميزة

نشاط

ليكن α و β عددين حقيقيين حيث $\alpha+\beta\neq 0$

1- بين أن G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ تكافئ $\forall M\in(P)\quad \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\quad+\quad)\overrightarrow{MG}$

2- ننسب المستوى (P) إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ/ بين أن $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

ب/ استنتج إحداثيتي G علما أن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

ج/ حدد إحداثيتي G' مرجح مرجح $(A;-5)$ و $(B;2)$ حيث $A(-2;3)$ و $B(1;4)$

مبرهنة

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$

تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\quad+\quad)\overrightarrow{MG}$ α

نتيجة

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$

تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$

تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{BA}$

ملاحظة

مرجح نقطتين مختلفتين A و B تنتمي إلى المستقيم (AB)

-6 إحداثيتا مرجح نقطتين

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ و $G(x_G;y_G)$

إذا كان G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ فان

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

تمرين

أنشئ G مرجح $(A;-2)$ و $(B;3)$ ثم أنشئ G' مرجح $(A;2)$ و $(B;1)$

أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

تمرين

أنشئ I مرجح $(A;2)$ و $(C;1)$ ثم J مرجح $(A;1)$ و $(B;2)$ و K مرجح $(C;1)$ و $(B;-4)$

1- أثبت أن B مرجح $(C;1)$ و $(K;3)$

2- بين أن J منتصف $[KI]$.

تمرين

لتكن $A\neq B$

1- حدد مجموعة النقط M حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=0$

2- حدد مجموعة النقط M حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|$

تمرين حدد إحداثيتي G مرجح $(A;-2)$ و $(B;6)$ حيث $A(-1;2)$ و $B(-4;3)$

-II مرجح ثلاث نقط

-1 أنشطة

نشاط1

لتكن A و B و C ثلث نقط من المستوى

1- أنشئ G حيث $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2- هل يمكن إنشاء G حيث $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

نشاط2

لتكن A و B و C نقط مختلفة و α و β و λ أعداد حقيقية

نحدد G حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ $(*)$

الجواب

لدينا $(*)$ تكافئ $(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$

-* إذا كان $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$ فان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{(\alpha+\beta+\lambda)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{(\beta+\lambda+\alpha)}\overrightarrow{AC}$

ومنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

-* إذا كان $\alpha+\beta+\lambda=0$ فان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فانه لا توجد نقطة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ فان جميع نقط المستوى تحقق $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ نقط متزنة من المستوى حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha+\beta+\lambda=0$ فان النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ لا تقبل مرجحا

3- مركز ثقل ثلاث نقط

تعريف

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح A و B و C المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصية

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

خاصية

متوسطات مثلث ABC تتلاقى في نقطة وحيدة G هي مركز ثقل المثلث ABC

و تحقق $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

اذا كان A' و B' و C' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي فان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ و $\overrightarrow{CG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

4- خاصية

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

5- الخاصية المميزة

نشاط

α و β و λ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$

1- بين أن G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ تكافئ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\lambda+\beta)\overrightarrow{MG}$

2- ننسب المستوى (P) إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ/ بين أن $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\lambda+\beta+\alpha}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\lambda}{\beta+\lambda+\alpha}\overrightarrow{OC}$

ب/ استنتج إحداثيتي G علما أن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

مبرهنة

α و β و λ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$

تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

6- إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ و $C(x_C;y_C)$ و

$G(x_G;y_G)$ إذا كان G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ فان

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\lambda x_C}{\alpha+\beta+\lambda} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\lambda y_C}{\alpha+\beta+\lambda} \end{cases}$$

7- خاصية التجميعية

α و β و λ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$

G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ ومنه $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

* لو كان $\alpha+\beta\neq 0$ فان $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ تقبل مرجحا G_1 ومنه $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG_1}$

وبالتالي $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG_1}+\lambda\overrightarrow{MC}=((\alpha+\beta)+\lambda)\overrightarrow{MG}$

إذن G مرجح $(G_1;\alpha+\beta)$ و $(C;\lambda)$

* بنفس الطريقة نبين أن G مرجح $(G_2;\alpha+\lambda)$ و $(B;\beta)$ حيث G_2 مرجح $(A;\alpha)$ و $(C;\lambda)$

* بنفس الطريقة نبين أن G مرجح $(G_3;\beta+\lambda)$ و $(A;\alpha)$ حيث G_2 مرجح $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$

خاصية

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم

تمرين

أنشئ G مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

أنشئ G' مرجح $(A;-3)$ و $(B;2)$ و $(C;-1)$

تمرين

ABC مثلث و G مرجح $(A;1)$ و $(B;4)$ و $(C;-2)$ و D نقطة حيث $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

أنشئ الشكل

بين أن D و C و G مستقيمية

تمرين

ABC مثلث. حدد مجموعة النقط M حيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

III- مرجح أربع نقط

1- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ نقط متزنة من المستوى حيث

$\alpha+\beta+\lambda+\mu\neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}+\mu\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha+\beta+\lambda+\mu=0$ فان النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ لا تقبل مرجحا

2- مركز ثقل أربع نقط

تعريف

مركز ثقل أربع نقط A و B و C و D هو مرجح A و B و C و D المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

R

خاصية

مركز ثقل أربع نقط A و B و C و D هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;1)$

3- خاصية

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

4- الخاصية المميزة

مبرهنة

α و β و λ و μ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda+\mu\neq 0$

تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}+\mu\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\lambda+\mu)\overrightarrow{MG}$

5- خاصية التجميعية

خاصية

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها معينا بمجموع معاملاتها.

تمرين

$ABCD$ متوازي الأضلاع

أنشئ G مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$ و $(D;1)$

بين أن $G\in(AC)$

R

تمارين حول المرجح

تمرين1

أنشئ G مرجح $(A;-2)$ و $(B;3)$ ثم أنشئ G' مرجح $(A;2)$ و $(B;1)$

أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

تمرين2

أنشئ I مرجح $(A;2)$ و$(C;1)$ ثم J مرجح $(A;1)$ و$(B;2)$ و K مرجح $(C;1)$ و $(B;-4)$

1- أثبت أن B مرجح $(C;1)$ و $(K;3)$

2- بين أن J منتصف $[KI]$.

تمرين3

ليكن ABC مثلثا وB' مرجح $(A;-2)$ و$(C;1)$ ثم A' مرجح $(A;2)$ و$(B;-3)$ وC' مرجح $(C;-1)$ و $(B;3)$

1- أنشئ الشكل

2- بين مهما كانت M من المستوى $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$

3- استنتج أن النقط A' و B' و C' مستقيمية.

تمرين4

لتكن $A \neq B$

1- حدد مجموعة النقط M حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=0$

2- حدد مجموعة النقط M حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|$

تمرين5

ليكن I مرجح $(B;2)$ و$(C;-3)$ ثم J مرجح $(A;1)$ و$(C;-3)$

1- أنشئ الشكل

2- حدد $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3- استنتج أن $(AI)//(BJ)$

تمرين6

ABC مثلث و G مرجح $(A;1)$ و $(B;4)$ و $(C;-2)$ و D نقطة حيث $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

أنشئ الشكل

بين أن D و C و G مستقيمية

تمرين7

ABC مثلث. حدد مجموعة النقط M حيث

$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

تمرين8

ليكن ABC مثلثا و G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;-3)$ و $(C;-2)$، و E نقطة حيث $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1- أنشئ الشكل

2- أ) حدد $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

ب) بين أن النقط A و E و G مستقيمية.

3- لتكن النقطة I مرجح $(A;1)$ و $(B;-3)$

بين أن G منتصف $[CI]$

R

تمرين9

1- أنشئ الرباعي $ABCD$ حيث المرج G للنقطتين $(A;2)$ و $(B;3)$ هو مرجح $(C;1)$ و $(D;4)$.

2- بين أن لكل نقطة M من المستوى $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

3- استنتج أن D مرجح $(A;2)$ و $(B;3)$ و $(C;-1)$

4- بين أن A مرجح النقط B و C و D معينة بمعاملات يجيب تحديدها

تمرين10

ABC مثلث و I و J و K نقط حيث C منتصف $[AI]$ و $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و J منتصف $[IC]$

1- بين أن K منتصف $(A;1)$ و $(B;3)$ و $(J;2)$

2- ليكن G مرجح $(A;1)$ و$(J;2)$

بين أن K منتصف $[BG]$

تمرين11

$ABCD$ متوازي الأضلاع

أنشئ G مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$ و $(D;1)$

نبين أن $G\in(AC)$

R

تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

I- الجداء السلمي (تذكير و إضافات)

1- أنشطة

1- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم النقط $C\left(-1;-3\right)$; $B\left(3;2\right)$; $A\left(1;-2\right)$

أحسب AB ; $\left\|3\overrightarrow{AC}\right\|$; $\left\|-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right\|$

2- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم المستقيمين

$(\Delta):\ 2x-y-3=0$; $(D):\ x+2y-4=0$

أ- حدد إحداثيتي النقطة A ، تقاطع (D) و (Δ)

ب- تأكد أن $B\left(-2;3\right)\in(D)$ و $C\left(1;-1\right)\in(\Delta)$

قارن AB^2+AC^2 و BC^2

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ماذا تستنتج

3- A و B نقطتان مختلفان من المستوى (P)، α قياس الزاوية $\left[\widehat{AOB}\right]$ و $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

a) أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في الحالتين التاليتين

$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$; $\|\vec{v}\|=5$; $\|\vec{u}\|=6$

$\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$; $\|\vec{v}\|=5$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$

b) حدد α في الحالتين التاليتين

$\vec{u}\cdot\vec{v}=6\sqrt{2}$; $\|\vec{v}\|=4$; $\|\vec{u}\|=3$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$; $\|\vec{v}\|=4$; $\|\vec{u}\|=3$

4- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين حيث $\vec{u}^2=3$; $\vec{v}^2=5$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$

أحسب $\left(3\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)$

2- تعاريف

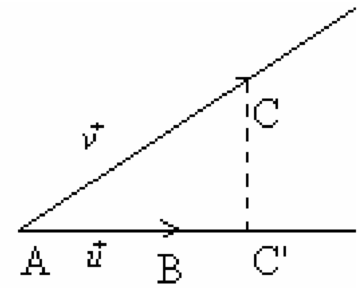
أ- الجداء السلمي لمتجهتين

a) تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين . نعتبر A و B و C ثلاث نقط من المستوى حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و C' المسقط العمودي لـ C على (AB)

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC'}$



b) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و θ القياس الرئيسي للزاوية $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ و O نقطة من المستوى ، توجد نقطتان وحيدتان حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

R

بما أن $-\pi \prec \theta \leq \pi$ فان $|\theta|$ هو قياس للزاوية الهندسية $\left[\widehat{AOB}\right]$

ومنه $\vec{u}\cdot\vec{v} = OA \times OB \cos\left[\widehat{AOB}\right]$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos|\theta|$

إذن $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ لأن $\cos\theta = \cos(-\theta)$

ليكن α قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

ومنه $\theta \equiv \alpha \quad [2\pi]$ و بالتالي $\cos\theta = \cos\alpha$

إذن $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

تعريف

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

α قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

ملاحظة

*- إذا كانت $\vec{u}$ أو $\vec{v}$ منعدمة فان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

*- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين فان $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

تمرين أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ حيث $\dfrac{-89\pi}{6}$ أحد قياسات الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ و $\|\vec{u}\| = 3 \quad ; \quad \|\vec{v}\| = 4$

ب – خاصيات

مهما كانت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و العدد الحقيقي α

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

$\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u} + \vec{w}\cdot\vec{v}$

$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$

ج- تعامد متجهتين

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

II- صيغ تحليلية

1- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

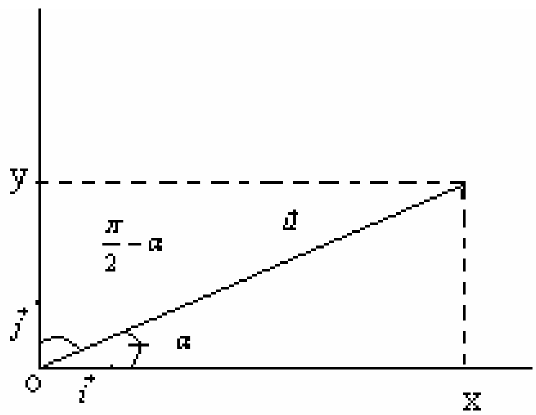
إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

ملاحظة إذا كان $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان $\vec{u}\cdot\vec{i} = x \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{j} = y$

أمثلة أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في الحالات.................

2- إحداثيتا متجهة في أساس متعامد ممنظم مباشر

ليكن $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j})$ و α قياس $\left(\widehat{\vec{i};\vec{u}}\right)$



R

لدينا $x=\vec{u}\cdot\vec{i}$; $y=\vec{u}\cdot\vec{j}$

ومنه $x=\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|\cos\alpha$ $\quad y=\|\vec{u}\|\|\vec{j}\|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

إذن $x=\|\vec{u}\|\cos\alpha$ $\quad y=\|\vec{u}\|\sin\alpha$

خاصية

إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i};\vec{j})$ و α قياس $(\widehat{\vec{i};\vec{u}})$ فان $\vec{u}=\|\vec{u}\|(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j})$

حالة خاصة

إذا كانت $\vec{u}$ متجهة واحدية (أي $\|\vec{u}\|=1$) فان $\vec{u}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$

3- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

* إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
* إذا كان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ فان

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

4- الشرط التحليلي لتعامد متجهتين

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان حيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

تمرين

حدد المتجهات الواحدية و المتعامدة مع $\vec{u}(-1;2)$

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\ \|\vec{v}\|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}\text{..........}$$

تمرين نعتبر $A(1;3)$ $B(3;1)$ $C(-3;-1)$

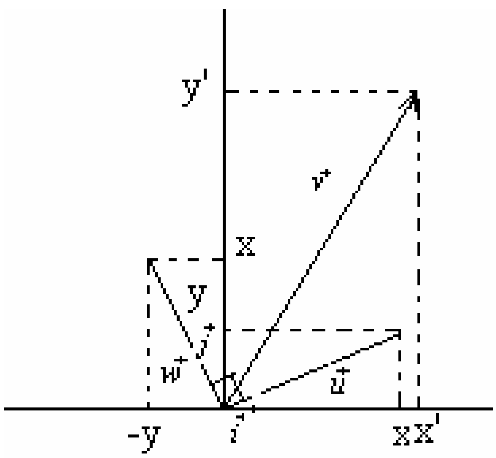
بين أن ABC قائم الزاوية في A

5- حساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$

* المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ وθ قياس $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ فان $\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

* نعتبر المتجهة $\vec{w}$ بحيث $\overline{(\vec{u};\vec{w})}=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ $\quad \|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$



لدينا باستعمال علاقة شال $\overline{(\vec{u};\vec{v})} - \overline{(\vec{u};\vec{w})} = \overline{(\vec{v};\vec{w})}$

$$\overline{(\vec{v};\vec{w})} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

نعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|\|\vec{v}\|}$$

لدينا $\vec{v}\cdot\vec{w} = xy' - yx' = \det(\vec{u};\vec{v})$

إذن $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

تمرين

ليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ حيث $\vec{u}\left(-\sqrt{3};-3\right)$ و $\vec{v}\left(-1;\sqrt{3}\right)$. حدد θ.

III- معادلة مستقيم معرف بمتجهة منظمية

1- متجهة منظمية

تعريف (D) مستقيم في المستوى، كل متجهة غير منعدمة عمودية على متجهة موجهة للمستقيم (D) تسمى متجهة منظمية على المستقيم (D).

2- خاصيات

* إذا كانت $\vec{n}$ منظمية على (D) فان كل متجهة $k\vec{n}$ ، $\left(k\in\mathbb{R}^*\right)$ منظمية عليه.
* إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ متجهتين منظميتين على مستقيم (D) فانهما تكونان مستقيميتين .
* اذا كانت $\vec{u}(a;b)$ موجهة لـ(D) فان المتجهة $\vec{n}(-b;a)$ منظمية عليه.

2- معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه

$\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى لتكن M نقطة

$\overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}(-b;a)$ مستقيميتان

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(-b;a)$.

إذن مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

معادلته ستكون على شكل $ax + by + c = 0$

خاصية

لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

خاصية

إذا كانت $\vec{n}(a;b)$ منظمية على(D) فان معادلة (D) على شكل $ax + by + c = 0$

إذا كان $(D):\ ax + by + c = 0$ فان $\vec{n}(a;b)$ منظمية على(D)

تمرين

1- حدد متجهة منظمية لكل مستقيم من المستقيمات التالية

$(D_1)\,3x - 2y + 1 = 0 \quad ; \quad (D_2): 2y - 1 = 0$

$(D_3): x - 3 = 0$

2- حدد المستقيم المار من $A(-1;3)$ و $\vec{n}(4;3)$ منظمية عليه

R

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(2;1)$ و $B(0;1)$ و $C(-2;3)$ و $\vec{u}(-2;5)$

1- حدد معادلة للمستقيم (D) المار من A و $\vec{u}$ منظمية عليه

2- أ) حدد معادلة ديكارتية لواسط $[A;B]$

ب) حدد Ω تقاطع واسطات المثلث ABC

3- حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المار من A

3- شرط تعامد مستقيمين

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم م.م نعتبر

$(D'): a'x + b'y + c' = 0$ $\quad$ $(D): ax + by + c = 0$ حيث $(a';b') \neq (0;0)$; $(a;b) \neq (0;0)$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

نتيجة

$(D'): y = m'x + p'$ $\quad$ $(D): y = mx + p$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow mm' = -1$$

4- مسافة نقطة عن مستقيم

نشاط

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$. (D) المستقيم المار من $B(x_B;y_B)$ و $\vec{n}(a;b)$ منظمية عليه. لتكن $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى ، H المسقط العمودي للنقطة A على (D).

أ- أحسب $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}$ بدلالة $\overrightarrow{HA}$ و $\vec{n}$

ب- أثبت أن $HA = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}\right|}{\|\vec{n}\|}$

د- ليكن $(D): ax + by + c = 0$ حيث $(a;b) \neq (0;0)$

بين أن $HA = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن $(D): ax + by + c = 0$ حيث $(a;b) \neq (0;0)$ و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي $d(A;(D)) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

تمرين

$(D): 3x - 4y + 1 = 0$; $A(-2;3)$

حدد $d(A;(D))$

تمرين

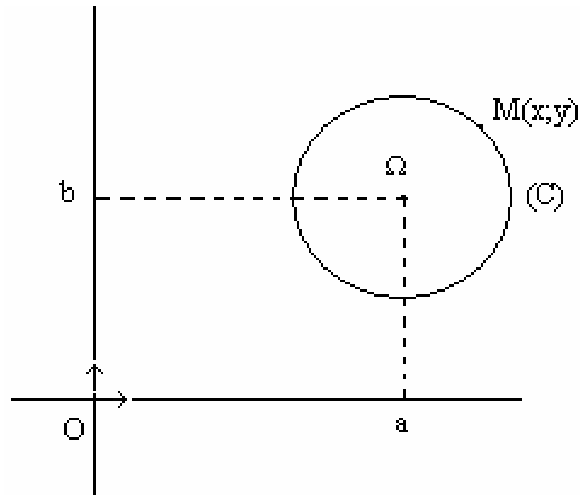
أحسب احداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة $A(-3;5)$

على المستقيم $(D): x - 2y + 8 = 0$

دراسة تحليلية لدائرة

I- معادلة دائرة

1- معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بمركزها و شعاعها



في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ،

نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r $(r \geq 0)$

$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \Omega M = r$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r $(r \geq 0)$ هي $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

حالة خاصة

معادلة الدائرة (C) التي مركزها أصل المعلم و شعاعها r هي $x^2+y^2=r^2$

أمثلة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

1- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $\Omega(-2;3)$ و شعاعها 4

2- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $A(2;3)$ وتمر من النقطة $B(1;-3)$

ملاحظة

* بوضع $c = a^2+b^2-r^2$

معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r تكتب على شكل

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

* نعتبر $\{\Omega\}$ دائرة مركزها Ω و شعاعها منعدم

2- دراسة المعادلة $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

لتكن (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = a^2+b^2-c$$

إذا كان $a^2+b^2-c \prec 0$ فان $(E)=\varnothing$

إذا كان $a^2+b^2-c = 0$ فان $(E)=\{\Omega(a;b)\}$

إذا كان $a^2+b^2-c \succ 0$ فان $(E)=C(\Omega(a;b);r)$ حيث $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

مبرهنة

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. a و b و c أعداد حقيقية.

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ هي معادلة لدائرة إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2-c \geq 0$

مركز هذه الدائرة هو$\Omega(a;b)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

R

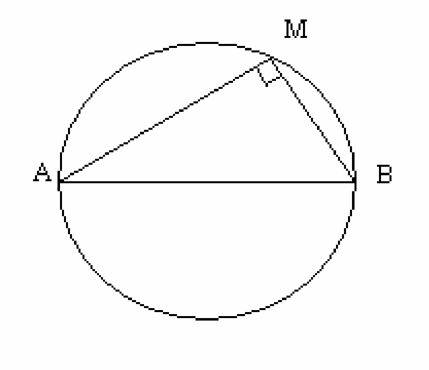
تمرين

حدد (E) مجوعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-2x+y+7=0$

حدد (E') مجوعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-6x+4y-7=0$

3- معادلة معرف بأحد أقطارها

لتكن (C) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$



$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

مبرهنة

ليكن A و B نقطتين مختلفتين

مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ هي الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ، معادلة الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ هي

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر $A(-1;2)$ و $B(-5;4)$ و $C(-3;6)$

1- حدد الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

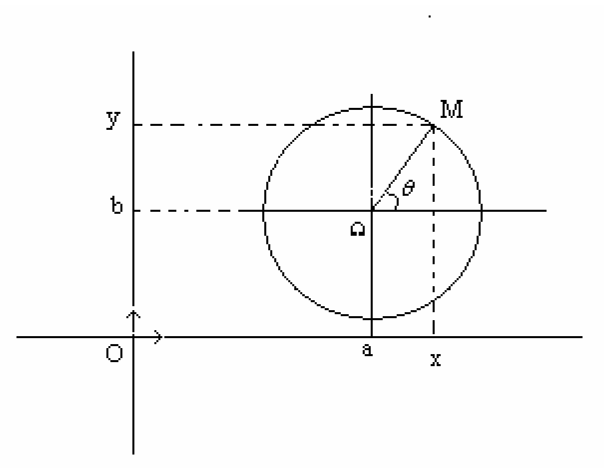
2- أ- تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية

ب- حدد معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC

4- تمثيل بارامتري لدائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها غير منعدم r

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{r}\right)^2+\left(\frac{y-b}{r}\right)^2=1$$



ومنه يوجد عدد حقيقي θ من $[0;2\pi[$ حيث

$$\begin{cases}\dfrac{x-a}{r}=\cos\theta\\[2mm] \dfrac{y-b}{r}=\sin\theta\end{cases}$$

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow\quad \exists\theta\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$$

مبرهنة و تعريف

مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r $(r\succ 0)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$

النظمة $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتري لدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

R

حالة خاصة

التمثيل البارامتري للدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r هي $\theta \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

تمرين

حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) المعرفة بالمعادلة $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

5- داخل و خارج دائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

نعتبر $c = a^2 + b^2 - r^2$

$\Omega M = r \Leftrightarrow M(x;y) \in (C)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

M داخل $(C) \Leftrightarrow \Omega M \prec r$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \prec 0$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة معادلتها

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

- داخل الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \prec 0$
- خارج الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \succ 0$

تمرين

حل مبيانيا

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \prec 0 \\ x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1) \leq 0$

II- تقاطع مستقيم ودائرة

1- مبرهنة

ليكن (D) مستقيم و (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r

* إذا كان $d(\Omega;(D)) \succ r$ فان $(D) \cap (C) = \varnothing$
* إذا كان $d(\Omega;(D)) = r$ فان $(D) \cap (C)$ أحادية
* إذا كان $d(\Omega;(D)) \prec r$ فان (D) و (C) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين.

تمرين

أدرس تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D) في الحالات التالية

1- $(C) = C(\Omega(1;-2);2)$ و $(D): x + 2y - 1 = 0$

2- $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ و $(D): 3x + 4y - 6 = 0$

3- $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ و $(D): 3x + 4y - 5 = 0$

2- المماس للدائرة

a- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω

(D) مماس للدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega;(D)) = r$

ملاحظة

لتكن A نقطة من المستوى

إذا كان A داخل دائرة (C) فانه لا يوجد أي مماس لها مار من A

R

إذا كان $A \in (C)$ فانه يوجد مماس وحيد لـ (C) مار من A

إذا كان A خارج دائرة (C) فانه يوجد مماسان لها ماران من A

b- المماس لدائرة عند أحد نقطها

أ- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و A نقطة منها

تقول إن المستقيم (D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A إذا وفقط إذا كان (D) عموديا على (ΩA) في A.

ب- خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

لتكن M نقطة من (D)

(D) مماس للدائرة (C) عند $A \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2$

خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

(D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A اذا وفقط اذا كان $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2 \quad \forall M \in (D)$

ج- معادلة المماس عند أحد نقطها

ليكن (D) مماس للدائرة (C) مركزها Ω و شعاعها r عند النقطة $A(x_0;y_0)$

لتكن $M(x;y)$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow (x-a)(x-x_0)+(y-b)(y-y_0)=r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

حيث $c=a^2+b^2-r^2$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. إذا كانت (C) دائرة

معادلتها $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ فان معادلة المماس لها عند $A(x_0;y_0)$ هي

$$xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

ملاحظة

معادلة المماس لدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r عند النقطة $A(x_0;y_0)$

هي $xx_0+yy_0-r^2=0$

تمرين

نعتبر الدائرة $(C): x^2+y^2-x-2y=0$

تأكد أن $A(1;2) \in (C)$ حدد معادلة للمماس لـ (C) عند A

تمرين

في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم . نعتبر الدائرة (C)

التي معادلتها $x^2+y^2+2x-2y-2=0$

1- حدد مركز وشعاع (C)

2- حدد موضع $A(2;3)$ بالنسبة للدائرة (C)

3- حدد جميع المماسات للدائرة (C) المارة من A

R

تحليلية الجداء السلمي و تطبيقاته

التمرين1

في مستوى منسوب إلى معلم م.م، نعتبر $\vec{u}\left(1;\sqrt{3}\right)$ و $\vec{v}\left(2;-2\sqrt{3}\right)$ و $\vec{w}\left(-2;3\right)$ و θ القياس الرئيسي لـ $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

1- حدد θ

2- حدد $\vec{w}\,'$ حيث $\|\vec{w}\,'\|=1$; $\vec{w}\perp\vec{w}\,'$

التمرين2

لتكن A و B نقطتين من المستوى و G مرجح $(A;3)$ و $(B;2)$ حيث $AB=5$

1- أ) أحسب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

ب) ليكن (E) مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=10$

بين أن $G\in(E)$

برهن أن (E) هو المستقيم العمودي على (AB) في G

2- حدد (F) مجموعة النقط M حيث $MA^2+MB^2=7$

التمرين3

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر $\vec{u}=a\vec{i}+(2+a)\vec{j}$; $\vec{v}=4\vec{i}+(2+a)\vec{j}$

حيث $a\in\mathbb{R}$

1- أوجد a حيث $\vec{u}\perp\vec{v}$

2- نفترض أن $a=-1$

أ- أعط معادلة ديكارتية لكل من (Δ) و (D) بحيث (D) يمر من $I\left(1;0\right)$ و موجه بـ $\vec{u}$ ،و(Δ) يمرمن $J\left(0;1\right)$ و $\vec{n}\left(2-\sqrt{3};1\right)$ متجهة منظمة عليه

ب- أحسب $\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{w}}\right)$ و $\sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{w}}\right)$ حيث $\vec{w}$ موجهة للمستقيم (Δ) و استنتج القياس الرئيسي لـ $\left(\widehat{\vec{u};\vec{w}}\right)$

التمرين4

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر النقط $A\left(1;3\right)$ و $B\left(3;2\right)$ و $C\left(2;1\right)$

حدد تحليليا مجموعة النقط M من المستوى حيث $MA^2-3MB^2+2MC^2=0$

أثبت هذه النتيجة هندسيا

التمرين5

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر النقط $A\left(-1;-3\right)$ و $B\left(2;1\right)$ و $C\left(6;-2\right)$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) واسط $[AB]$

2- بين أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=25$ استنتج $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

3- ليكن (Δ) مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2-5$

حدد طبيعة (Δ)

4- نعتبر $(D_m):m^2x-(2m+1)x-3=0$

حدد m حيث $(\Delta)\perp(D_m)$

التمرين6

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر النقطتين $A\left(-2;5\right)$ و $B\left(-5;3\right)$

و $(D):x-2y+8=0$

R

1- حدد $d\left(B;(D)\right)$
2- حدد A' مماثل A بالنسبة للمستقيم (D)
3- حدد معادلة (D') المار من B و العمودي على (D)

التمرين7

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(1;3)$ و $B(4;8)$ و $C(3;1)$
أحسب مساحة المثلث ABC

التمرين8

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر ABC مثلثا حيث $A(1;3)$ و المستقيمين $(D_1):\ 2x-5y+4=0$ و $(D_2):\ x+y-1=0$ هما ارتفاعي المثلث ABC المارين على التوالي من B و C
1- أعط معادلة ديكارتية لكل من المستقيمين (AC) و (AB)
2- حدد زوجي إحداثيتي كل من B و C

التمرين9

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(1;1)$ و $B\left(2+\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ و $C(6;-4)$.
ليكن H المسقط العمودي للنقطة B على (AC).
1- أ- حدد قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$
ب- استنتج أن $\sin\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2- أ- استنتج $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}\right)$
ب- استنتج احداثيتي النقطة H

دراسة تحليلية لدائرة

تمرين1

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(3;1)$ و $B(-1;5)$ و $C(1;1)$ و الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2;3)$ و شعاعها 5
1- حدد معادلة للدائرة (C)
2- حدد وضعية النقط A و B و C بالنسبة للدائرة (C)
3- حدد معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC

تمرين2

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.
نعتبر النقطتين $A(1;2)$ و $B(0;5)$ و الدائرة (C) التي معادلتها $x^2+y^2-2x-3=0$
و (D) مستقيم معادلته $x-2y+3=0$
1- حدد مركز و شعاع الدائرة (C) تأكد أن $A\in(C)$
2- أ- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من B و $\vec{n}(3;4)$ منظمية عليه.
ب- بين أن تقاطع (C) و (Δ) مجموعة فارغة
3- تأكد أن (D) و (C) يتقطعان و حدد تقاطعهما
4- حل مبيانيا في $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x^2+y^2-2x-3\prec 0 \\ x-2y+3\geq 0 \end{cases}$
5- حدد معادلة المماس للدائرة (C) في النقطة A

R

تمرين3

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر (C) دائرة معادلتها $x^2+y^2-4x+6y+9=0$

1- حدد مركز و شعاع (C)

2- حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C)

3- أدرس تقاطع (C) مع محوري المعلم

4- أكتب معادلتي المماسين لـ (C) بحيث $\vec{u}(4;3)$ منظمية عليهما

5- أكتب معادلتي المماسين لـ (C) المارين من $A(2;1)$

تمرين4

في مستوى منسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر (C) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-2x-3y=0$

1- بين أن (C) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(2;0)$ و $B(0;3)$

2- أ- تأكد أن $C(2;3)\in(C)$

ب- حدد معادلة المماس لـ (C) عند النقطة C

3- أ- تأكد أن $E(-2;-3)$ خارج الدائرة (C)

ب- حدد معادلتي المماسين لـ (C) المارين من E

4- لتكن (C') الدائرة التي مركزها B و شعاعها OB. حدد تقاطع (C) و (C')

5- أ- حدد تقاطع (OC) و الدائرة (C)

ب- حل مبيانيا في $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-3y\leq 0 \\ 3x-2y\leq 0 \end{cases}$$

تمرين5

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط $A(-1;2)$ و $B(0;-1)$ و $C(-2;0)$ و (C) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2-2x-2y-3=0$

1- بين أن (C) دائرة شعاعها $r=\sqrt{5}$ مع تحديد مركزها

2- حدد موضع النقط A و B و C بالنسبة للدائرة (C)

3- حدد معادلة المستقيم (D) المماس للدائرة (C) في النقطة A.

4- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x+2y+2=0$ مماس للدائرة (C)، المار من C

ب- حدد معادلة المماس الآخر للدائرة (C) المار من C

5- أ- أحسب $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ و استنتج أن CAB مثلث قائم الزاوية في C

ب- حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C') المحيطةبالمثلث CAB

6- حل مبيانيا النظمة

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-3\leq 0 \\ x^2+y^2+x-y-2\leq 0 \end{cases} \quad (x;y)\in\mathbb{R}^2$$

7- حدد تقاطع الدائرة (C) و المستقيم ذا المعادلة $x-3y-3=0$

R

المتتاليات

الاولى سلك بكالوريا علوم تجريبية

القدرات المنتظرة

- توظيف الاستدلال بالترجع؛
- التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول؛
- التعرف على وضعيات لمتتاليات حسابية أو هندسية؛
- التمكن من دراسة متتالية (إكبار، إصغار، رتابة)؛
- حساب مجموع n حدا متتابعة من متتالية حسابية أو متتالية هندسية.
- استعمال المتتاليات الحسابية والهندسية في حل مسائل.

I- عموميات حول المتتاليات

1- تعاريف و مصطلحات

a/ أنشطة

1/ لاحظ ثم أتمم خمسة أعداد ملائمة لتسلسل كل لائحة من اللوائح التالية:

a- 1، 3، 5، 7، 9، 11،......

b- 1، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ ،.....

c- -3 ، $-\frac{3}{2}$ ، $-\frac{3}{4}$ ، $-\frac{3}{8}$ ، $-\frac{3}{16}$ ، $-\frac{3}{32}$ ،....

d- $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{6}{7}$ ،....

e- -2 ، 3 ، 1 ، 4 ، 5، 9 ،.....

- كل لائحة من اللوائح تسمى متتالية و الاعداد المكونة لكل لائحة تسمى حدود المتتالية
- نلاحظ أن لوائح أعلاه تسير بانتظام معين

اللائحة a هي الاعداد الفردية في ترتيب تصاعدي

اللائحة b هي أعداد على شكل $\frac{1}{n}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة c هي أعداد على شكل $\frac{-3}{2^n}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي

اللائحة d هي أعداد على شكل $\frac{n}{n+1}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة e هي أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد ين اللذين قبله وهكذا..........

2/ في كل لائحة من اللوائح a و b و c اذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ u_0 و الثاني بـ u_1 و الثالث بـ u_2 و هكذا دواليك فاننا نحصل على اللائحة u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ،........

أ/ ما رتبة u_8 ب/ حدد قيمة u_8

ج/ ما رتبة u_n ، حدد u_n

- u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ،........ تسمى حدود متتالية
- اذا كان الحد الاول هو u_0 فان رتبة u_0 هي 1 و رتبة u_1 هي 2 و هكذا.......رتبة u_n هي $n+1$

ج- a/ $u_n = 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ b/ $u_n = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ c/ $u_n = \frac{-3}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

u_n يسمى الحد العام للمتتالية

3/ في اللائحة d إذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ v_1 و الثاني بـ v_2 و الثالث بـ v_3 و هكذا دواليك فإننا نحصل على اللائحة v_1 ، v_2 ، v_3 ،........

ما رتبة v_n ، حدد v_n

رتبة v_n هي n و $v_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4/ حد صيغة التي تسير عليها اللائحة e

لاحظنا أن في اللائحة e أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد ياللذين قبلهما وهكذا..........
اذا اعتبرنا أن w_1 ، w_2 ، w_3 .... حدود متتالية الائحة e فان $w_3 = w_1 + w_2$ و $w_4 = w_2 + w_3$ ...
$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

ملاحظة:
المتتاليات في a و b و c و d أعطينا حدها العام بصيغة صريحة أي لحساب أي حد نعوض n و نحصل على النتيجة أم في e أعطينا حدها العام بدلالة حدود للمتتالية أي لحساب حد يجيب أن نرجع إلى حدين قبلهما

b/ تعريف

ليكن n_0 عددا صحيحا طبيعيا و $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ جزء من $\mathbb{N}$
كل دالة من I نحو $\mathbb{R}$ تسمى متتالية عددية

اصطلاحات
-* $u: \quad I \to \mathbb{R}$ متتالية عددية
يرمز لصورة n بواسطة u_n عوض $u(n)$. العدد u_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.
يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \in I}$ عوض u.
-* اذا كان $I = \mathbb{N}$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 0}$ أو (u_n)
-* اذا كان $I = \mathbb{N}^*$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 1}$
-* اذا كان $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ فانه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$

أمثلة
نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n \geq 2}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = (-2)^n + 3n \quad \text{و} \quad v_n = 2n^2 - 3n \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_1 = -2 \\ w_{n+1} = 2w_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات (u_n) و $(v_n)_{n \geq 2}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$

2- تحديد متتالية
تحدد المتتالية اذا علمت حدودها أو الوسيطة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها.
و هناك عدة طرق منها على الخصوص:

أ- المتتالية المحددة بالصيغة الصريحة للحد العام.
أمثلة
نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = 2n - 6 \quad \text{و} \quad v_n = a \ \text{حيث } a \text{ عدد حقيقي} \quad \text{و} \quad w_n = \frac{(-2)^n}{n+1}$$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ متتاليات محددة بالصيغة الصريحة
أحسب الحد الثالث لكل من المتتاليات (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$

ب – المتتالية الترجعية: أي لحساب حد من حدودها نرجع لحدود أخرى
أمثلة
نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \qquad v_1 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} w_3 = 1 \\ w_{n+1} = 3w_n - 1 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ متتاليات ترجعية
/1 أحسب u_1 ; u_2 ; u_3 ; v_2 ; v_3 ; w_2 ; w_0

R

2/ بين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{2n+1}$

II- المتتاليات المحدودة – المتتاليات الرتبة

1-المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة – المتتالية المحدودة

أنشطة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) حيث $u_n = \frac{2}{3}n - 1$ و $v_n = \frac{n+1}{2n+3}$

1/ أحسب u_0 و u_1 و v_0 و v_1

2/ بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$ و $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1$

....

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$ نقول إن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1$ نقول إن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 1

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

ملاحظة $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in I \quad |u_n| \leq k$

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$u_n = 2n - 1$ و $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2 \end{cases}$ و $w_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

بين أن (u_n) مصغور ة و $(v_n)_{n\geq 1}$ مكبورة بالعدد3 و $(w_n)_{n\geq 1}$ محدودة.

2- المتتالية الرتبة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \geq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية قطعا اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \succ u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \leq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية قطعا اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \prec u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I لدينا $u_n = u_m$

أمثلة

أدرس رتابة المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) حيث $u_n = 2n - 1$ و $v_n = -3n + 5$

نشاط

برهن أن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

خاصيات

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حيث $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

R

$\left(u_n\right)_{n\in I}$ متتالية تزايدية قطعا $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \succ u_n$

$\left(u_n\right)_{n\in I}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$

$\left(u_n\right)_{n\in I}$ متتالية تناقصية قطعا $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \prec u_n$

$\left(u_n\right)_{n\in I}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية $\left(u_n\right)$ و $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ و $\left(w_n\right)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{2^n}{n} \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2} w_n + 1 \end{cases}$$

1- أدرس رتابة $\left(u_n\right)$ و $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$

2- أ- بين أن $w_n \prec 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- بين أن $\left(w_n\right)_{n\geq 1}$ تزايدية .

III- المتتالية الحسابية - المتتالية الهندسية

A- المتتالية الحسابية

1- تعريف

تكون متتالية $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$

العدد r يسمى أساس المتتالية .

أمثلة

نعتبر المتتاليتين $\left(u_n\right)$ و $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ حيث $u_n = -2n+1$ و $v_n = \dfrac{1}{n}$

بين أن $\left(u_n\right)$ متتالية حسابية محددا أساسها.

هل $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية؟

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

نشاط

$\left(u_n\right)_{n\geq p}$ حسابية أساسها r و حدها الأول u_p

1/ بين بالترجع أن $\forall n \geq p \quad u_n = u_p + (n-p)r$

2/ نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + ...u_{n-1}$

أ- بين بالترجع أن $1+2+3...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ب- ما عدد حدود المجموع S_n

ت- بين أن $S_n = \dfrac{(n-p)\left(u_p + u_{n-1}\right)}{2}$

خاصية

اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq p}$ متتالية حسابية أساسها r فان $\forall n \geq p \quad u_n = u_p + (n-p)r$

ملاحظة

- اذا كان $\left(u_n\right)$ متتالية حسابية أساسها r فان $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$
- اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r فان $\forall n \geq 1 \quad u_n = u_1 + (n-1)r$
- اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq p}$ متتالية حسابية أساسها r فان $\forall n \geq q \geq p \quad u_n = u_q + (n-q)r$

خاصية

R

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1}..............+u_{n-1}$ فان $S_n = \dfrac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1..............+u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2..............+u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

تمرين

لتكن (u_n) متتالية حسابية اساسها3 و حدها الأول $u_0 = -2$

1 / أحسب u_n بدلالة n و أحسب u_{200}

2/ أحسب مجموع 100 حدا أولا للمتتالية

تمرين

لتكن (u_n) متتالية حسابية حيث $u_{50} = 20$ و $u_{30} = -40$

1/ حدد أساس ثم الحد العام للمتتالية (u_n)

2/ أحسب المجموع $S = u_{15} + u_{16} + ... + u_{54}$

تمرين

أحسب $S_n = 1+3+5+....+(2n+1)$

تمرين

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

-1 بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

-2 استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

-3 أحسب u_n بدلالة n. ثم أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n.

B- المتتالية الهندسية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \geq n_0$

العدد q يسمى أساس المتتالية .

أمثلة

(u_n) متتالية حيث $u_n = 3(2)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا أساسها

تمرين

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ و $u_1 = 1$ و $v_n = u_n - 2$

بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها

R

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

نشاط

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q

1/ بين بالترجع أن $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

2/ نعتبر $q \neq 1$ و $S_n = u_p + u_{p+1} .... + u_{n-1}$

أ- بين أن $S_n - qS_n = u_p - u_n$

ب- استنتج أن $S_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

ملاحظة - اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \geq 1 \quad u_n = u_1 q^{n-1}$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \geq p \geq n_0 \quad u_n = u_p q^{n-p}$

أمثلة

* لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n

* لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} .... + u_{n-1}$ فان $S_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة

- إذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 .... + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 .... + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حالة خاصة

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} .... + u_{n-1} = u_p(n-p)$

تمرين

1/ لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n

2/ لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

R

حدد الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n

تمرين

أحسب بدلالة n المجموع $S = 2+4+8+16........+2^n$

تمرين

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $u_0 = -3$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4$ لكل $n \in \mathbb{N}$

نضع $v_n = u_n + 6$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها q وحدها الأول v_0
2. احسب v_n ثم u_n بدلالة n
3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

احسب S_n بدلالة n

المتتاليات

تمرين1

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ

$$u_1 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

1- أحسب u_2 ; u_3

2- بين أن $u_n \prec 2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية .

تمرين2

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين بما يلي

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{9}{u_n + 1} \end{cases} \qquad v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

بين أن (v_n) متتالية حسابية و أحسب v_n بدلالة n

تمرين3

نعتبر المتتاليتين (u_n)و(v_n) المعرفتين بـ

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i$ بدلالة n.

ثم أحسب $S'_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n.

تمرين4

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1- أحسب u_2 ; u_3

2- بين أن $u_n \prec 3$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3- أدرس رتابة $(u_n)_{n\geq 1}$ و استنتج أن $u_n \geq 2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4- نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $v_n = u_n - 3$

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n .

ب- أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n

تمرين5

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي $u_1 = 2$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \quad ; \quad v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

1- أحسب u_2 و u_3 و v_2

2- بين أن $0 \leq u_n \leq 3$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3- أدرس رتابة $(u_n)_{n\geq 1}$

4- أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n

ب- أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i$

تمرين 6

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1- أحسب u_2 ; u_3

2- نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad ; \quad b_n = 2^n u_n$$

أ- بين أن (a_n) متتالية هندسية و أحسب a_n بدلالة n

ب- بين أن (b_n) متتالية حسابية و أحسب b_n بدلالة n

ت- استنتج u_n بدلالة n

تمرين7

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1- نضع $w_n = v_n - u_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

بين أن $(w_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب w_n بدلالة n

2-- أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية و أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية

ب- بين أن $u_n \prec v_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ج- استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ مكبورة و أن $(v_n)_{n\geq 1}$ مصغورة

الحساب المثلثي

القدرات المنتظرة:

- التمكن من مختلف صيغ التحويل؛
- التمكن من حل معادلات ومتراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى المعادلات والمتراجحات الأساسية؛
- التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية.

1- أنشطة

a/ أنشطة تذكيرية

نشاط1

بسط التعابير التالية

$$A=\sin(11\pi-x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)\cdot\cos(5\pi-x)$$

$$B=\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}+\tan\frac{3\pi}{5}+\tan\frac{4}{5} \qquad \pi$$

نشاط2

1/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

أ- $\sin x=\frac{1}{2}$ ب- $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج- $\tan x=-1$

2/ حل المتراجحات

أ- $\cos x\geq\frac{1}{2}$ $x\in]-\pi;\pi]$ ب - $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{2}$ $x\in[-\pi;\pi]$

ج- $\tan x\prec 1$ $x\in[0;2\pi]$

b/ أنشطة التقديم

أنشطة

نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم مباشر مرتبط بالدائرة المثلثية (C). ليكن x و y عددين حقيقيين. و M و M' نقطتين من (C) أفصوليهما المنحنيين x و y على التوالي

1- بين أن $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$

2- أ/ بين أن $\left(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}\right)\equiv x-y\quad[2\pi]$ ثم استنتج أن $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\cos(x-y)$

ب/ استنتج أن $\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$

3/ استنتج أن $\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$

$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$

$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$

4/ بين أن $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq 1$.

استنتج أن $\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x-y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq -1$.

5/ استنتج أن $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ و $k\in\mathbb{Z}$

2/ صيغ التحويل

a/ خاصيات

$$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$$
$$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$$

$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq 1$

$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x-y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq -1$

b/ نتائج

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ و $k\in\mathbb{Z}$

تمرين

أحسب النسب المثلثية للعدد $\frac{\pi}{8}$

تمرين

بين أن $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ و $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

c/ تحويل مجموع إلى جداء – تحويل جاء إلى مجموع

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$$
$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$
$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y$$

بوضع $x+y=p$ و $x-y=q$ أي أن $x=\frac{p+q}{2}$ و $y=\frac{x-y}{q}$

نحصل على النتائج

تحويل مجموع إلى جداء

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

تحويل جداء الى مجموع

مما سبق نستنتج أن

R

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$$
$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

<u>تمرين</u>

أكتب $\cos 3x+\cos 7x$ على شكل جداء

<u>تمرين</u>

في مثلث مثلث ABC

بين أن $\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}=4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\times\cos\frac{\widehat{B}}{2}\times\cos\frac{\widehat{C}}{2}$

<u>تمرين</u>

بين أن $\sin^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x.\sin x$

<u>تمرين</u>

أكتب على شكل مجموع الجداء: $\sin 2x.\sin 3x.\sin 5x$

3- تحويل $a\cos x+b\sin x$

ليكن التعبير $a\cos x+b\sin x$ حيث $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

نلاحظ أن $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

ومنه يوجد α من $]-\pi;\pi]$

حيث $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x)$$
$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

حيث $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\qquad$ $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ملاحظة:

يمكننا تحويل $a\cos x+b\sin x$ لحل المعادلات من شكل $a\cos x+b\sin x=c$

أو المتراجحات $a\cos x+b\sin x\leq c$ أو $a\cos x+b\sin x\geq c$

تمرين

1/ حل المعادلة $\cos x+\sqrt{3}\sin x=-1 \quad x\in\mathbb{R}$

2/ حل المتراجحة التالية

$x\in[-\pi;2\pi] \quad \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x\succ -\sqrt{2}$

R

إضافة

تحديد النسب المثلثية للعدد x بدلالة $t=\tan\frac{x}{2}$

لدينا $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

نقسم البسط و المقام بالعدد $\cos^2\frac{x}{2}$ مع اعتبار شروط الوجود

ومنه $\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ أي $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

باستعمال العلاقات $\sin x=2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$ و نفس الطريقة نحصل على $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

بوضع $\tan\frac{x}{2}=t$

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

R

تمارين حول الحساب المثلثي

تمرين1

بين أن

$$\cos 3x + \sin 3x = (\cos x - \sin x)(4\cos x \sin x + 1)$$

$$\cos^2 \frac{5}{2}x - \cos^2 \frac{3}{2}x = (-\sin 4x)\sin x$$

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$\tan x - \tan y = \frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

$$\tan^2 x - \tan^2 y = \frac{\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)}{\cos^2 x \cos^2 y}$$

تمرين2

نعتبر $(E):\quad \sin 3x = -\sin 2x$

1- حل المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ ثم في $]-\pi;\pi]$

2- أ- بين أن $\sin 3x = (4\cos^2 x - 1)\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ب- استنتج أن $(E) \Leftrightarrow (4\cos^2 x + 2\cos x - 1)\sin x = 0$

3- حدد من بين حلول المعادلة (E) في المجال $]-\pi;\pi]$ التي تحقق $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

4- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $4x^2 + 2x - 1 = 0$

5- استنتج $\cos\frac{2\pi}{5}$ و $\cos\frac{4\pi}{5}$

تمرين3

نعتبر $p(x) = 2\sin^2 x - 10\sin x.\cos x + 12\cos^2 x$

1- بين أن $2\sin^2 x + 12\cos^2 x = 5\cos(2x) + 7 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = 5\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 7$

3- حل المعادلة $p(x) = 12 \quad x \in]-\pi;\pi]$ ومثل حلولها على الدائرة المثلثية

4- حل المتراجحة $p(x) \prec 7 \quad x \in \left]-\frac{5\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right]$

تمرين4

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(E):$ $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 9x = 0$

تمرين5

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $\cos x + \cos y = a$ و $\sin x + \sin y = b$ و $a^2 + b^2 = 1$

1- بين أن $\cos(x-y) = -\frac{1}{2}$

2- بين أن $\sin(x+y) = 2ab$

تمرين6

R

ليكن a و b من $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$

بين أن $\tan(a+b)\leq\frac{\tan 2a+\tan 2b}{2}$

تمرين7

-1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\sin 2x=\tan x \quad ; \quad \tan x\cdot\tan 4x=-1$$

$$\cos x+\sin x=1$$

$$\cos 2x+\cos x-2=0$$

$$\cos 2x+\sin 2x=1$$

-2 حل المتراجحتين

$$x\in[0;\pi] \quad \sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\succ -1$$

$$x\in]-\pi;\pi] \quad \cos x+\sin x+\tan x\geq\frac{1}{\cos x}$$

تمرين8

-1 بين أن $\forall x\in\mathbb{R} \quad \cos 3x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

-2 أ) حل في $[0;2\pi[$ المعادلة $\cos 3x=\frac{1}{2}$

ب) بين أن $\cos\frac{\pi}{9}$ و $\cos\frac{7\pi}{9}$ و $\cos\frac{13\pi}{9}$ حلول

للمعادلة $8X^3-6X-1=0$

ج) استنتج قيم $A=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}$

$$B=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13}{9}+\cos\frac{}{9}\cos\frac{13\pi}{9} \qquad \pi$$

$$C=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13}{9} \qquad \pi$$

تمرين9

ليكن x و y و z أعداد حقيقية حيث $x+y+z=\pi$

بين أن

أ- $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-1=-2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z$

ب- $\tan x+\tan y+\tan z=\tan x\cdot\tan y\cdot\tan z$ حيث x و y و z تخالف $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}/$

ج- $\frac{\cos x}{\sin y\ \sin z}+\frac{\cos y}{\sin x\ \sin z}+\frac{\cos z}{\sin y\ \sin x}=2$ حيث x و y و z تخالف $k\pi$ $k\in\mathbb{Z}/$

تمرين10

نعتبر $p(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ و $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

-1 بين أن $p(x)=\sin 2x(1+2\cos x)$ و $Q(x)=\cos x(1+2\cos x)$

-2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=Q(x)$

-3 حل المتراجحة $Q(x)\geq 0$ $x\in[0;\pi]$

تمرين11

R

1- أ- تحقق أن $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

ب- حدد α حيث $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\alpha)$

2- نعتبر المعادلة: $(E):\quad \tan x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

بين أن $(E)\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

3- أ- حل في $[0;2\pi]$ المعادلة (E)

ب- حل في $[0;2\pi]$ المتراجحة $\tan x\prec\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

النهـــايات

القدرات المنتظرة	الدورة الثانية الدرس الأول
ـ حساب نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدوال اللاجذرية؛ ـ حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال النهايات الاعتيادية	10 ساعة

1- النهاية لا منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x^3$

1- أرسم C_f

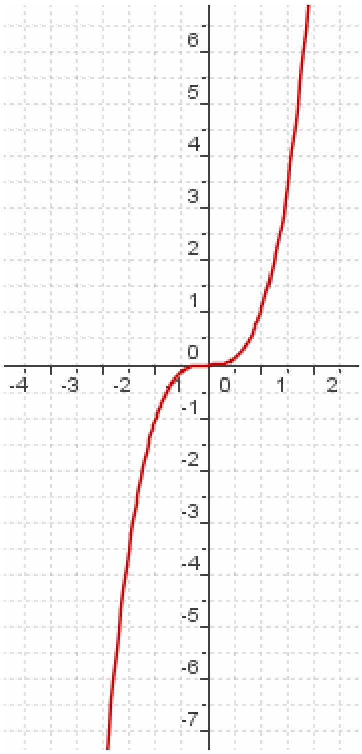
2- أتمم الجدول التالي

x	$-10^{10^{100}}$	$-10^{10^{12}}$	$-10^{10^{9}}$	-10^{100}	-10	10	10^{100}	$10^{10^{9}}$	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$										

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول x إلى $+\infty$

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول x إلى $-\infty$



نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة فان $f(x)$ تأخذ قيما أكبر فأكبر و موجبة وتؤول الى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة فان $f(x)$ تأخذ قيما أصغر فأصغر و سالبة وتؤول الى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

نكتب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

كتابات و نهايات اعتيادية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=-\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty;a]$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ إذا كان n زوجي

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ إذا كان n فردي

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

أمثلة $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2- النهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

1- باستعمال احد البرامج المعلوماتية أرسم C_f

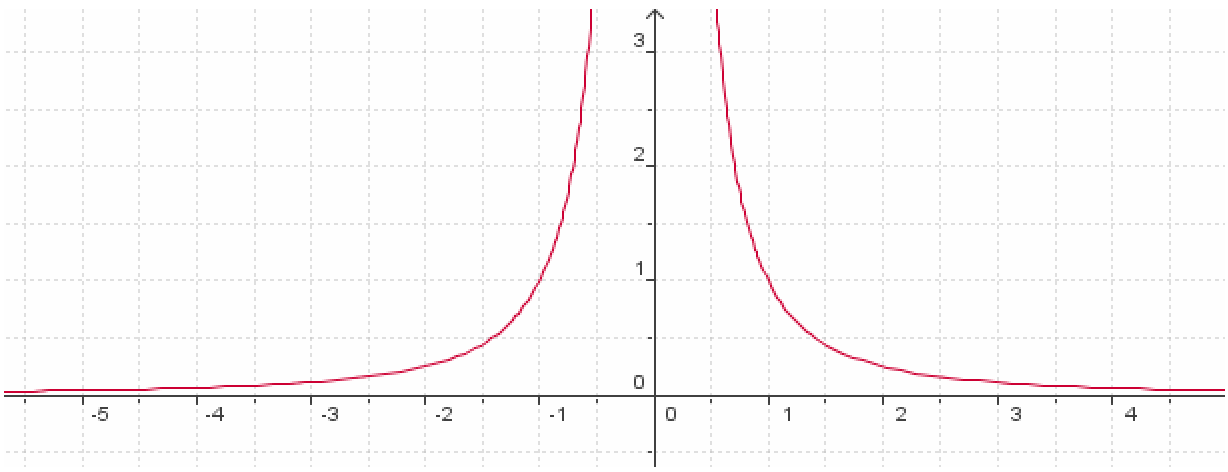
2- أتمم الجدول التالي

x	$-10^{10^{100}}$	$-10^{10^{12}}$	$-10^{10^{9}}$	-10^{100}	-10	10	10^{100}	$10^{10^{9}}$	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$										

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول x إلى $+\infty$

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول x إلى $-\infty$



نلاحظ في كلتا الحالتين $f(x)$ يؤول إلى 0 نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

R

نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

1- أرسم C_f

2- خد قيما أكبر فأكبر وموجبة و أملئ بها الجدول

x										
$f(x)$										

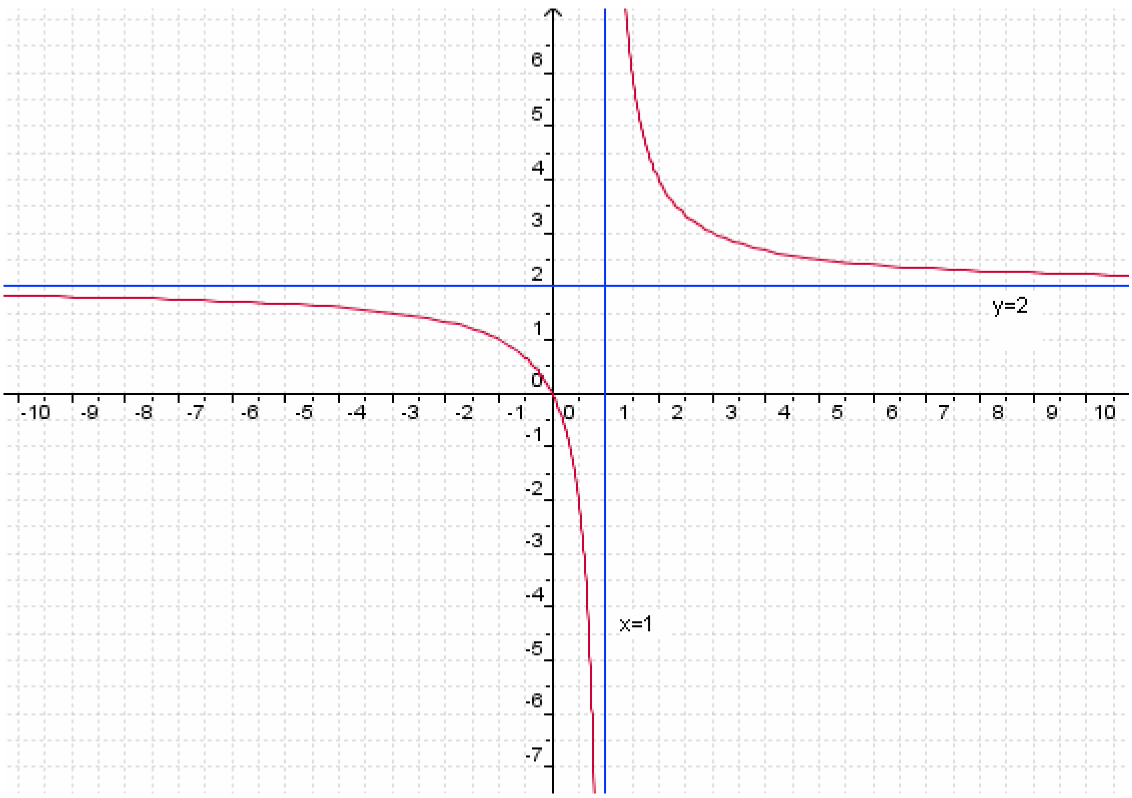
من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول x إلى $+\infty$

خد قيما أصغر فأصغر وسالبة و أملئ بها الجدول

x										
$f(x)$										

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول x إلى $-\infty$



نلاحظ في كلتا الحالتين $f(x)$ يؤول إلى2 نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

النهاية منتهية عند $+\infty$

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

اذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=l$

النهاية منتهية عند $-\infty$

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty;a[$

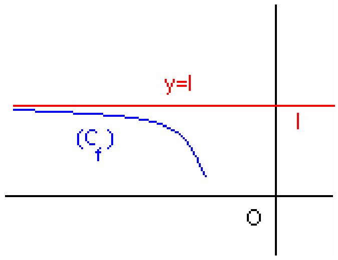
اذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=l$

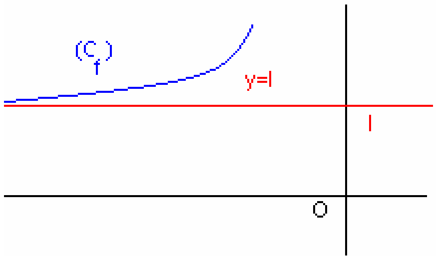
R

ملاحظات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ *

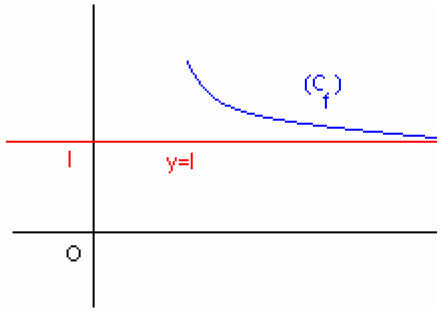
منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة $y=l$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

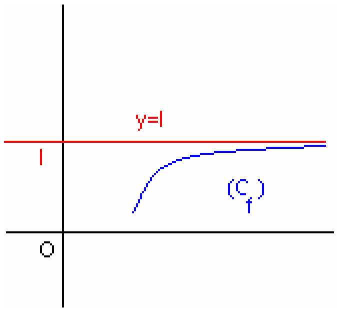




$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ *

منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة $y=l$ عندما يؤول x إلى $+\infty$





*- إذا كانت f زوجية فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

*- إذا كانت f فردية فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

نهايات اعتيادية

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \qquad \forall(k;n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$$

خاصية

لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا

- اذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ أو $(-\infty)$ فان هذه النهاية وحيدة
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-l\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-l\right)=0$

تمرين

نعتبر $f(x)=\dfrac{-3x^2+1}{x^2}$

بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$

الجواب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-3)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+1}{x^2}+3=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

اذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

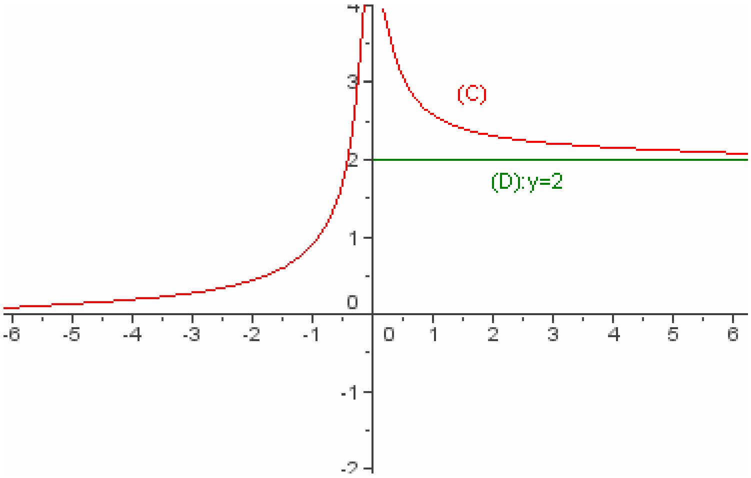
R

تمرين : قراءة نهايات مبيانيا

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$

من خلال الشكل

حدد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$



من خلال الشكل

المنحنى يقترب من المستقيم $(D): y = 2$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

المنحنى يقترب من محور الأفاصيل عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3- نهاية منتهية و لا منتهية لدالة في نقطة

نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x) = x^2$ و $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

1- أ/ أرسم C_f

ب/ أتمم الجدول التالي

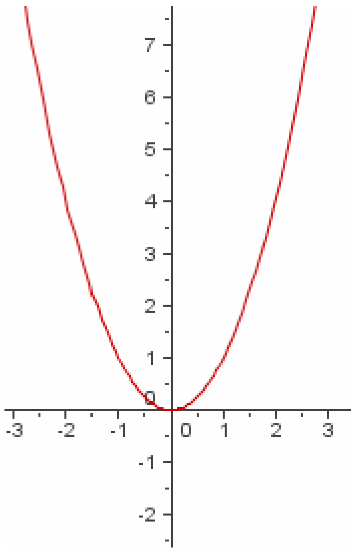
x	-0,2	$-0,1$	$-0,001$	-10^{-30}	10^{-30}	0,001	0,1	0,2
$f(x)$								

من خلال الشكل و الجدول ماذا تلاحظ استنتج $\lim_{x\to 0} f(x)$

2- أتمم الجدول التالي

x	-0,2	$-0,1$	$-0,001$	-10^{-30}	10^{-30}	0,001	0,1	0,2
$g(x)$								

من خلال الجدول ماذا تلاحظ تضن $\lim_{x\to 0} g(x)$



1/ من خلال الشكل و الجدول

نلاحظ أن $f(x)$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى 0

نقول إن نهاية $f(x)$ هي 0 عند 0

نكتب $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

2/ من خلال الجدول

نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيما أكبر فأكبر وموجبة أي تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى 0

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عند 0

نكتب $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

نهاية منتهية لدالة في نقطة

ليكن a و l عددين حقيقيين و f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim_{x \to a} f(x) = l$ أو $\lim_{a} f = l$

خاصية

ليكن a و l عددين حقيقيين $\lim_{x \to 0} x^n = 0$

إذا كان $f(x)$ تقبل l في a عان النهاية وحيدة

نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$\lim_{x \to 0} x^n = 0$

أمثلة $\lim_{x \to 0} x = 0$ $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

نهاية لامنتهية لدالة في نقطة

ليكن a و l عددين حقيقيين و f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{a} f = +\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{a} f = -\infty$

3-النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

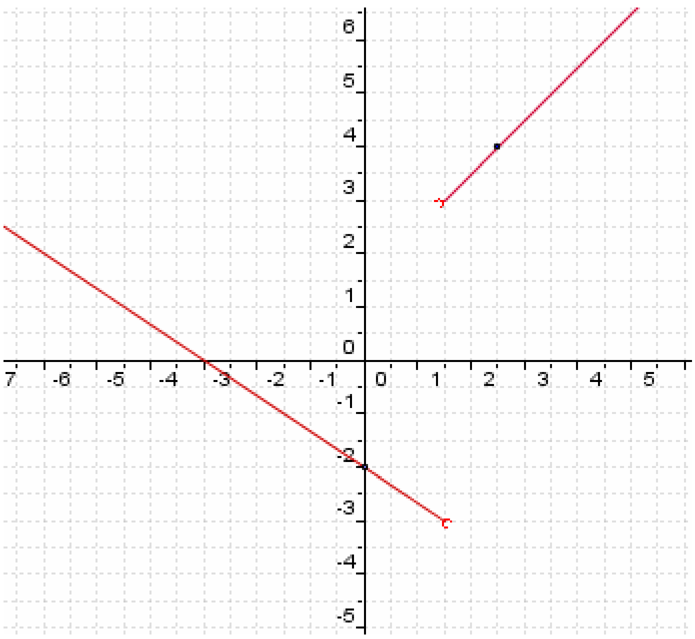
حدد D_f

أنشئ C_f

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 1 على اليمين

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 1 على اليسار

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$



نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليمين إلا و $f(x)$ تقترب من 3 نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 1 على اليمين هي 3 نكتب

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$ أو $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} f(x) = 3$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليسار إلا و $f(x)$ تقترب من -3 نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 1 على اليسار هي -3 نكتب

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -3$ أو $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} f(x) = -3$

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{1}{x}$

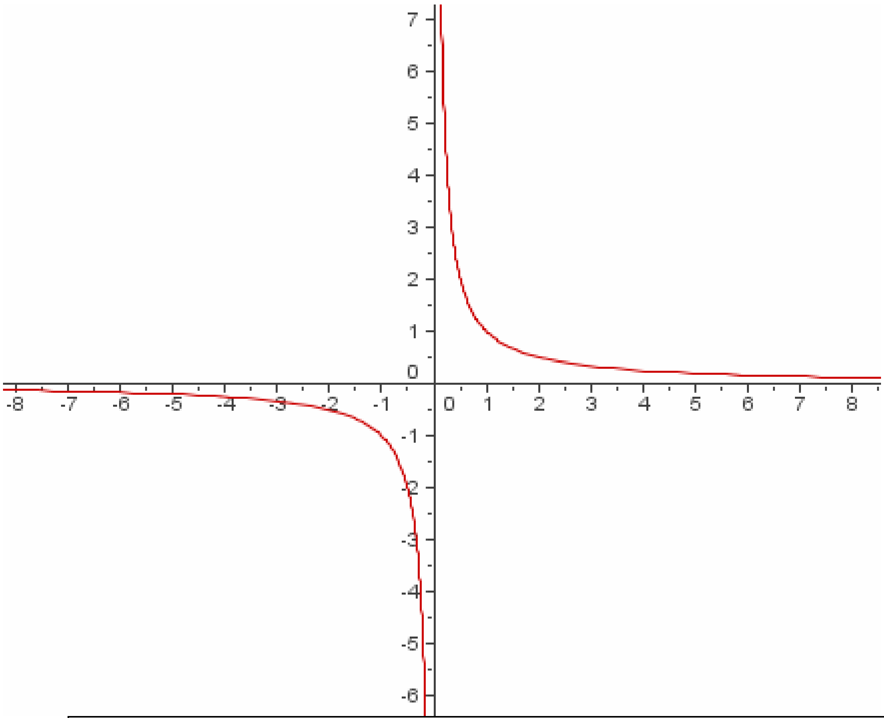
حدد D_f

أنشئ C_f

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 0 على اليمين

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 0 على اليسار

$D_f=\mathbb{R}^*$



نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليمين فان $f(x)$ تؤول $+\infty$ نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 0 على اليمين هي $+\infty$ نكتب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

أو $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)=+\infty$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليسار فان $f(x)$ تؤول $-\infty$ نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 0 على اليسار هي $-\infty$ نكتب $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

أو $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\prec0}} f(x)=-\infty$

ليكن a و l عددين حقيقيين

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\prec a}} f(x)=l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\prec a}} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=-\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\prec a}} f(x)=-\infty$

نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

R

$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=+\infty$ إذا كان n زوجيا

$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$ إذا كان n فرديا

$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

أمثلة

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4}=+\infty$

مبرهنة

لتكن f دالة عددية

$\lim_{x\to a}f(x)=l$ تكافئ $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=l$

$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ تكافئ $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ تكافئ $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty$

تمرين

لتكن f دالة عددية حيث

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} & x\succ 0 \\ f(x)=x^3 & x\leq 0 \end{cases}$$

حدد $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ و $\lim_{x\to 0^-}f(x)$ استنتج $\lim_{x\to 0}f(x)$

الجواب

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ و $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^3=0$ ومنه $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$

إذن $\lim_{x\to 0}f(x)$

تمرين

لتكن f دالة عددية حيث $f(x)=\frac{x^2-4}{|x+2|}$

1- بين أن $\lim_{x\to -2}x-2=-4$ و $\lim_{x\to -2}-x+2=4$

2- استنتج $\lim_{x\to -2^-}f(x)$ و $\lim_{x\to -2^+}f(x)$

3- هل الدالة f تقبل نهاية في -2

الجواب

1- نبين أن $\lim_{x\to -2}x-2=-4$

نضع $X=x+2$ أي $X-2=x$

عندما يؤول x إلى -2 فان X تؤول إلى 0

$\lim_{x\to -2}x-2=\lim_{X\to 0}X-4$

و حيث أن $\lim_{X\to 0}X=0=\lim_{X\to 0}\left[(X-4)-(-4)\right]$ فان $\lim_{X\to 0}X-4=-4$ اذن $\lim_{x\to -2}x-2=-4$

نبين أن $\lim_{x\to -2}-x+2=4$

R

$$\lim_{x\to -2} -x+2 = \lim_{X\to 0} -X+4$$

وحيث أن $\lim_{X\to 0} -X = 0$ $\lim_{X\to 0}\left[(-X+4)-4\right] = 44$ $\lim_{X\to 0} -X+4 = 44$ اذن $\lim_{x\to -2} -x-2 = 4$

2/ نستنتج $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ و $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

لدينا $\forall x \succ -2 \quad f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x+2|} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2$

ومنه $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} x-2 = -4$

لدينا $\forall x \prec -2 \quad f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x+2|} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)} = -x+2$

ومنه $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} -x-2 = 4$

3/ لدينا $\lim_{x\to -2^+} f(x) \neq \lim_{x\to -2^-} f(x)$ إذن الدالة f لا تقبل نهاية في -2

4- العمليات على النهايات

نقبل جميع العمليات الاتية

نعتبر دالتين f و g.

عند x_0 أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

أ- نهاية مجموع

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

ب- نهاية جداء

نهاية f	نهاية g	نهاية $f\times g$
l	l'	$l\times l'$
l $\quad l\neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l
l $\quad l\neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	$+\infty$	شكل غير محدد
0	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

ملاحظة:

لحساب نهاية λf حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ يمكن اعتبار λf كجداء الدالة

الثابتة $x \to \lambda$ التي نهايتها هي λ و الدالة f

ج- نهاية خارج

نهاية f	نهاية g	نهاية $\frac{f}{g}$
l	l' و $l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$	0
l	$-\infty$	0
$l \succ 0$ أو $+\infty$	0^+	$+\infty$
$l \prec 0$ أو $-\infty$	0^+	$-\infty$
$l \succ 0$ أو $+\infty$	0^-	$-\infty$
$l \prec 0$ أو $-\infty$	0^-	$+\infty$
0	0	شكل غير محدد
$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	l حيث $l \neq 0$	∞ مع وضع إشارة l
$-\infty$	l حيث $l \neq 0$	∞ مع وضع عكس إشارة l

د- نهاية دالة حدودية – دالة جدرية

لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$ في حالة $Q(a) \neq 0$

إذا كانت ax^n و bx^m هما على التوالي حديتي $P(x)$ و $Q(x)$ الأكبر درجة فان

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^n$$ و $$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^n$$

و $$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$$ و $$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$$

أمثلة

$$\lim_{x\to 2} x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2^3 - 2^2 + 6 - 1 = 9$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-3x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 3} = \frac{-3(-1)^2 - (-1) + 1}{3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -4x^5 + 3x^2 - 5x + 1 = \lim_{x\to+\infty} -4x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^7 + 7x^3 - x + 31 = \lim_{x\to-\infty} -3x^7 = +\infty$$

R

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5+3x^2-5x+1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{3}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+7x^3-x+31}{x^9+3x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7}{x^9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5+3x^2-5x+1}{3x^5-x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5}{3x^5}=\frac{7}{3}$$

تمرين

حدد النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x)^5\left(-2x^2+5\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}7x^5+3+\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x} \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{3}{-x^2+x} \qquad \lim_{x\to1^+}\frac{2x-5}{x-1} \qquad \lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}\ ;\ \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{3x-2}{x^2-3x+2} \qquad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

الجواب

نحدد النهايات

* لدينا $\lim_{x\to3}x^2-x=9-3=6$ و $\lim_{x\to3}x^2+x-6=9+3-6=6$ ومنه $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}=\frac{6}{6}=1$

* $\lim_{x\to+\infty}7x^5+3=\lim_{x\to+\infty}7x^5=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}7x^5+3+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

* $\lim_{x\to-\infty}-2x^2+5=\lim_{x\to-\infty}-2x^2=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(1-x)^5=\lim_{x\to-\infty}-x^5=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}(1-x)^5\left(-2x^2+5\right)=-\infty$

*إذا كان $x\prec2$ فان $x-2\prec0$ ومنه $\lim_{x\to2^-}x-2=0^-$ إذن $\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$

* نحدد $\lim_{x\to1^+}\frac{2x-5}{x-1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	

ومنه $\lim_{x\to1^+}x-1=0^+$ و لدينا $\lim_{x\to1^+}2x-5=-3$ إذن $\lim_{x\to1^+}\frac{2x-5}{x-1}=-\infty$

* نحدد $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}$

نحصل على الشكل الغير المحدد $(+\infty-\infty)$

$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$ وحيث $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-1=+\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}=\infty$

* نحدد $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$ بتعويض x نحصل على الشكل الغير المحدد $\frac{0}{0}$

$$\frac{1}{x-3}=\frac{x+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{x+1}{x^2-2x-3} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$$

R

ومنه $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{1}{4}$

* نحدد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$ بتعويض x نحصل على الشكل الغير المحدد $\dfrac{0}{0}$

ومنه الحدوديتان x^2+x-2 و $2x^2+x-3$ تقبلان القسمة على $x-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{2x+3}=\frac{3}{5}$$

* نحدد $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ و منه نحصل على الشكل الغير المحدد $(+\infty-\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ وحيث $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

فان $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=-\infty$

*نحدد $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}$

لدينا $\lim\limits_{x\to 1}x^2-3x+2=0$ $\lim\limits_{x\to 1}3x-2=1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-	0	+	

ومنه $\lim\limits_{x\to 1^-}x^2-3x+2=0^-$ إذن $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}=-\infty$

6 – نهايات الدوال اللاجدرية

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من شكل $[a;+\infty[$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ و $l\geq 0$ فان $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و $l\geq 0$ فان $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=+\infty$

ملحوظة:

الخاصية تبقى صحيحة اذا كان x يؤول الى $+\infty$ أو الى $-\infty$ أو الى a على اليمين أو a على اليسار

أمثلة:

لنحسب $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{1-4x}$

لدينا $\lim\limits_{x\to -2}1-4x=9$ ومنه $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{1-4x}=\sqrt{9}=3$

لنحسب $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^2-5x+4}$

لدينا $\lim\limits_{x\to -\infty}3x^2=+\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty}3x^2-5x+4=$ ومنه $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^2-5x+4}=\infty$

لنحسب $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^-}1-\dfrac{1}{x}=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=+\infty$

R

7- النهايات والترتيب

f و g و h دوال عددية و $I=]x_0-\alpha;x_0+\alpha[-\{x_0\}$ ضمن حيز تعريف هذه الدوال

* إذا كان لكل x من I ، $|f(x)-l|\le u(x)$ و كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$ فان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

* إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ وكان $g\le h\le f$ على I فان $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$

* إذا كان لكل x من I ، $f(x)\ge u(x)$ و كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty$ فان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

* إذا كان لكل x من I ، $f(x)\le u(x)$ و كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=-\infty$ فان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

ملاحظة

الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار مع تعويض I بالمجموعة المناسبة

أمثلة

* نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin x$

لدينا الدالة $x\to\sin^2 x$ لا تقبل نهاية

ونعلم أن $-1\le\sin x\le 1$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$ ومنه $x-1\le x+\sin x\le x+1$

و حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin x=+\infty$

* نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+\sin x}{x^2+1}=2$

لدينا $\left|\dfrac{2x^2+\sin x}{x^2+1}-2\right|=\left|\dfrac{\sin x-2}{x^2+1}\right|$

$|\sin-2|\le|\sin x|+|2|$ وحيث أن $|\sin x|\le 1$ فان $|\sin-2|\le 3$

ومنه $\left|\dfrac{\sin x-2}{x^2+1}\right|\le\dfrac{3}{x^2+1}$ أي $\left|\dfrac{2x^2+\sin x}{x^2+1}-2\right|\le\dfrac{3}{x^2+1}$

و حيث $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2+1}=0$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+\sin x}{x^2+1}=2$

8- نهايات مثلثة

أ/ خاصية

لكل عدد حقيقي a

$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ و $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

لكل عدد حقيقي a حيث $a\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

أمثلة

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$

$\lim\limits_{x\to\pi}\tan x=\tan\pi=0$

ب/ نقبل $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\quad\forall x\in\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

R

لنحدد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

لدينا $|\sin x|\le |x|\le |\tan x|$ $\forall x\in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه $\frac{1}{|\tan x|}\le\frac{1}{|x|}\le\frac{1}{|\sin x|}$ حيث $x\neq 0$

وبالتالي $\frac{|\sin x|}{|\sin x|}\le\frac{|\sin x|}{|x|}\le\frac{|\sin x|}{|\tan x|}$ أي أن $|\cos x|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le 1$

و حيث أن $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ و x و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

* لنحدد $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

نضع $X=\frac{x}{2}$ ومنه $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{X\to 0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin X}{X}\right)^2=\frac{1}{2}$

* لنحدد $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

لدينا $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1$

خاصية

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

نتيجة

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=1$

تمرين

حدد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1+\sin x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}$ ،

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

تمارين حو النهايات

تمارين و حلولها

تمرين

حدد النهايات التالية

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}\ \text{و}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1}\ \text{و}\ \lim_{x\to-\infty}-2x^4+3x^3+x-1\ \text{و}\ \lim_{x\to2}3+x-3x^2$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}\ \text{و}\ \lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2}\ \text{و}\ \lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}\ \text{و}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1}\ \text{و}$$

$$\text{و}\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x\ \text{و}\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x\ \text{و}\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\ \text{و}\ \lim_{x\to2^-}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}\ \text{و}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}\ \text{و}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2x+2}\ \text{و}\ \lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin x}\ \text{و}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}\ \text{و}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}\ \text{و}\ \lim_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos x}{\sin3x+\sin x}\ \text{و}$$

الجواب

نحدد النهايات

* $\lim_{x\to-\infty}-2x^4+3x^3+x-1=\lim_{x\to-\infty}-2x^4=-\infty \qquad \lim_{x\to2}3+x-3x^2=-7$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{-5x^5}=-\frac{2}{5}$$

* $$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4}{-x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{x^4}=0$$

* $$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x+3}=-\frac{1}{4}$$

* نحدد $\lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-	0	+	

$$\lim_{x\to1^+}x^2-3x+2=0^- \qquad \lim_{x\to1^+}-2x+1=-1 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2}=+\infty$$

R

* لدينا $\lim\limits_{x\to2} x^2-x-2=0$ و $\lim\limits_{x\to2} -2x+1=-3$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه $\lim\limits_{x\to2^+} x^2-x-2=0^+$ و $\lim\limits_{x\to2^-} x^2-x-2=0^-$

إذن $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-2x+1}{x^2-x-2}=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-2x+1}{x^2-x-2}=-\infty$

*
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=1$$

* لدينا
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x|=x$

ومنه
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

*
$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}$$

و حيث x تؤول إلى $-\infty$ فان x سالبة ومنه $|x|=-x$

إذن
$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}=-\frac{1}{2}$$

*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1$$

*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=2$$

R

* لدينا $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\times\frac{\sin 5x}{5x}\times 5$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

و حيث $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$ فان $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=1\times1\times5=5$

* لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan^2 x=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2 x+2}=0$

* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$

لدينا $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x+1}+1=2$ إذن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin 2x\cdot\sin x}{2\sin 2x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to0}-\tan x=0$

* لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{(1+\sin x)\cos x}{1-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=$

لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}1+\sin x=2$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x=0^-$ لأن $\cos x\prec 0$ $\forall x\in\left]-\pi;\frac{\pi}{2}\right[$

ومنه $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=-\infty$

تمرين2

بين أن $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

الجواب

لدينا $-1\le\sin\frac{1}{x}\le1$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ ومنه $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

و حيث أن $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ فان $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

تمرين3

نعتبر g دالتين عددية للمتغير حقيقي x حيث $g(x)=\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$

1- حدد $\lim\limits_{x\to0}g(x)$

3- بين أن $|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

R

الجواب

-1 نحدد $\lim_{x\to 0} g(x)$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1}$$

لدينا $\lim_{x\to 0} 2-\cos x=1$ ومنه $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1}=\frac{1}{2}$

وحيث $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ فان $\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

-2 نبين أن $|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad -1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow 1\le 2-\cos x\le 3\Leftrightarrow 0\le\sqrt{2-\cos x}-1\le\sqrt{3}-1\prec 1$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad |g(x)|=\left|\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}\right|=\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$$

لدينا $0\le\sqrt{2-\cos x}-1\prec 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و منه $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad 0\le\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}\prec\frac{1}{x^2}$

إذن $|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

نستنتج $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

لدينا $|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و منه $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

تمارين غير محلولة

تمرين1

حدد $\lim_{x\to-2} 2x^2-6x-1$; $\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-2x}{x+2}$; $\lim_{x\to-3}\sqrt{x^2-3x}$; $\lim_{x\to-2}\frac{3x^2-12}{x+2}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$; $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$; $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{2x^2-x-1}$; $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2-1}-x}{x-1}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x}}$; $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$

تمرين2

نعتبر f دالة عدددية

أدرس نهاية f على يمين ويسار x_0 و استنتج هل f تقبل نهاية في x_0

في الحالتين التاليتين

-أ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-4+x^2}{x-2} & x\succ 2\\ f(x)=\sqrt{x^2+12} & x\le 2\end{cases}$ $x_0=2$

-ب $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & x\ne 1\\ f(1)=2 & \end{cases}$ $x_0=1$

تمرين3

حدد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{5x}$ ، $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{3x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x+\sin x}{x+\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x-\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 2x}{\sin x+\sin 2x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x+\sin 3x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x-2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\tan x$

تمرين4

حدد $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2-2}{\sqrt{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x}{x-3}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

تمرين5

حدد $\lim\limits_{|x|\to+\infty} -4x^2-6x-1$; $\lim\limits_{|x|\to+\infty} 5x^3-3x$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2-5x}{-6x^4-2x}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-3x^6-2x}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-x$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2}}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ (نضع $x=\dfrac{1}{t}$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x+2x$

تمرين6

حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهايات عند محدات D_f

أ- $f(x)=2x^2-3x$ $\quad$ ب- $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+4}$

ج- $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ $\quad$ د- $f(x)=2x-\sqrt{x^2+5x+6}$

تمرين7

أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x}+x-1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-x-2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{5x^2-3x}{x^2-3x-10}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin^2 x}}{x^2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos 2x}{1-\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2\left(x^2-x\right)}{x^2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{1-\sqrt{2}\cos x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$

R

الدوران

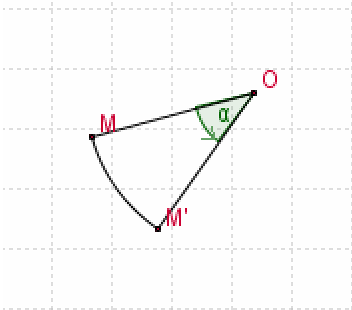
I- تعريف الدوران

1- تعريف

لتكن O نقطة من المستوى الموجه P و α عددا حقيقيا الدوران الذي مركزه O و زاويته α هو التطبيق من P نحو P الذي يربط كل نقطة M بنقطة M' بحيث:

- $M'=O$ اذا كانت $M=O$
- $\begin{cases} OM=OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ اذا كان $M\neq O$

*- نرمز للدوران الذي مركزه O و زاويته α بالرمز $r(O;\alpha)$ أو بالرمز r



*- النقطة M' تسمى صورة M بالدوران r نكتب $r(M)=M'$

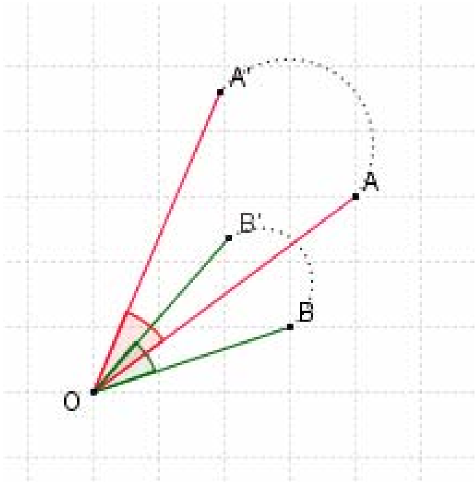
نقول كذلك أن الدوران r يحول M إلى M'

مثال

لتكن O و A وB ثلاث نقط و r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{6}$

أنشئA' وB' صورتي A وB على التوالي بالدوران r

الجواب



2 – استنتاجات

أ) المثلث المتساوي الساقين

- ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A يعني أن الدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ يحول B إلى C
- إذا كان ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ فان الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول B إلى C
- إذا كان ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ فان الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ يحول B إلى C

ب) الدوران الذى زاويته منعدمة

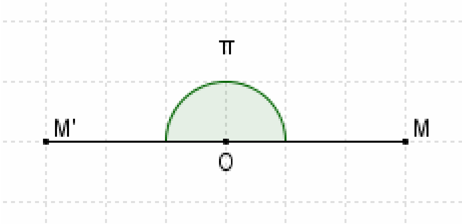
ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

- إذا كان $\alpha\equiv 0 \quad [2\pi]$ فان $r(M)=M$ في هذه الحالة r هو التطبيق المتطابق في المستوى جميع نقط المستوى صامدة
- إذا كان $\alpha\not\equiv 0 \quad [2\pi]$ فان النقطة الوحيد الصامدة بالدوران r هي مركزه O

R

ج) الدوران الذي زاويته مستقيمة

$r(O;\pi)=S_O$ حيث S_O التماثل المركزي الذي مركزه O



3- الدوران العكسي

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM=OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM'=OM \\ \left(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}\right)\equiv-\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow r'(M')=M \ / \quad r'=r(O;-\alpha)$$

الدوران $r(O;-\alpha)$ يسم الدوران العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بالرمز r^{-1}

$$\begin{cases} r^{-1}(M')=M \\ r^{-1}(O)=O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(M)=M' \\ r(O)=O \end{cases}$$

الدوران r تطبيق تقابلي في المستوى

خاصية

كل دوران $r(O;\alpha)$ هو تطبيق تقابلي في المستوى

الدوران $r(O;-\alpha)$ يسمى الدوران العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بـ: r^{-1}

تمارين تطبيقة

1- ليكن $ABCD$ مربعا

حدد زاويتي الدورانيين r_1 و r_2 الذي مركزاهما A و C على التوالي ويحولان معا النقطة D إلى B

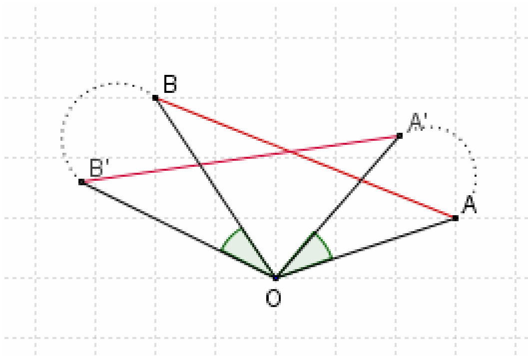
2- ليكن ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

أ- حدد مركز الدوران r الذي يحول B إلى C

ب- حدد الدوران العكسي للدوران r

II- خاصيات الدوران

1- خاصة أساسية (الحفاظ على المسافة)



ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا و A و B نقطتين

$r(B)=B' \quad ; \quad r(A)=A'$

لنقارن $AB=A'B'$

حسب علاقة الكاشي في المثلثين OAB و $OA'B'$ لدينا:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$$

$$AB'^2=OA'^2+OB'^2-2OA'\cdot OB'.\cos\left[\widehat{A'OB'}\right]$$

و بما أن $r(A)=A' \quad ; \quad r(B)=B'$ فان: $\begin{cases} OA=OA' \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ و $\begin{cases} OB=OB' \\ \left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$

و لدينا من جهة أخرى

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}) + (\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$$
$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \alpha + (\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}) - \alpha \quad [2\pi]$$
$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}) \quad [2\pi]$$

ومنه $[\widehat{AOB}] = [\widehat{A'OB'}]$

و بالتالي $A'B'^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB.\cos[\widehat{AOB}]$

ومنه $A'B'^2 = AB^2$ اذن $A'B' = AB$

خاصية

ليكن r دورانا و A وB نقطتين من المستوى إذا كان $r(A) = A'$; $r(B) = B'$ فان $A'B' = AB$ نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على المسافة

تمرين

ليكن ABC مثلثا . نعتبر M و N نقطتين خارج المثلث بحيث MAB و NAC مثلثان متساويا الأضلاع

قارن MC و NB

III- الدوران و استقامة النقط

أ) صورة قطعة

لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r

لتكن M نقطة من $[AB]$ و M' صرتها بالدوران r

1- بين أن $M' \in [A'B']$

2- بين اذا كان $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0 \le \lambda \le 1$ فان $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$

الجواب

لدينا A' وB' وM' صور A و B و M بدوران r ومنه $MA = M'A'$ و $MB = M'B'$ و $AB = A'B'$

1- $M \in [AB]$ تكافئ $MA + MB = AB$

تكافئ $M'A' + M'B' = A'B'$

تكافئ $M' \in [A'B']$

2- ليكن $\lambda \in [0;1]$ و $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$

ومنه $M \in [AB]$ و $\dfrac{AM}{AB} = \lambda$

و بالتالي $M' \in [A'B']$ و $\dfrac{A'M'}{A'B'} = \lambda$

إذن $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$

خاصية

لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي القطعة $[A'B']$ اذا كان $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0 \le \lambda \le 1$ فان $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M) = M'$

ب- صورة مستقيم

لتكن A' وB' صورتي النقطتين المختلفتين A و B بدوران r

أ- بين أن $r([AB]) = [A'B']$

ب- بين أن $r((AB)) = (A'B')$

R

خاصية

لتكن A' وB' صورتي نقطتين مختلفتين A و B على التوالي بدوران r - صورة نصف المستقيم $[AB)$ هو نصف المستقيم $[A'B')$ - صورة المستقيم (AB) هو المستقيم $(A'B')$ - إذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M)=M'$

ج- المرجح و الدوران

A' وB' و G' صورالنقط A و B و G بدوران r على التوالي و G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

بين أن G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

الجـواب

G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ ومنه $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

و حيث الدوران يحافظ على معامل استقامية فان $\overrightarrow{A'G'}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A'B'}$

إذن G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

خاصية

A' وB' و G' صورالنقط A و B و G بدوران r على التوالي اذا كان G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ فان G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$ الدوران يحافظ على مرجح نقطتين

ملاحظة: الخاصية تبقى صحيحة لمرجح أكثر من نقطتين

نتيجة

A' وB' و I' صور النقط A و B و I بدوران r على التوالي إذا كان I منتصف $[AB]$ فان I' منتصف $[A'B']$ الدوران يحافظ على المنتصف

د) الحفاظ على معامل الاستقامية

A' وB' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda\in\mathbb{R}$

حيث $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$

لنبين أن $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

لنعتبر النقطة E حيث $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$ و E' صورة E بالدوران r

و منه $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$ و بالتالي $\overrightarrow{A'E'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ لان المرجح يحافظ على معامل استقامية النقط

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$ تكافئ $[AD]$ و $[AE]$ لهما نفس المنتصف

و حيث أن الدوران يحافظ على المنتصف فان $[A'D']$ و $[A'E']$ لهما نفس المنتصف

ومنه $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{A'E'}$

اذن $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

خاصية

لتكن A' وB' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda\in\mathbb{R}$ إذا كان $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا

ننشئ خارجه المثلث CBF المتساوي الأضلاع و داخله المثلث ABE متساوي الأضلاع

نعتبر الدورن $r=r\left(B;\dfrac{\pi}{3}\right)$ و G نقطة حيث $r(G)=D$

بين أن النقط D و E و F مستقيمية

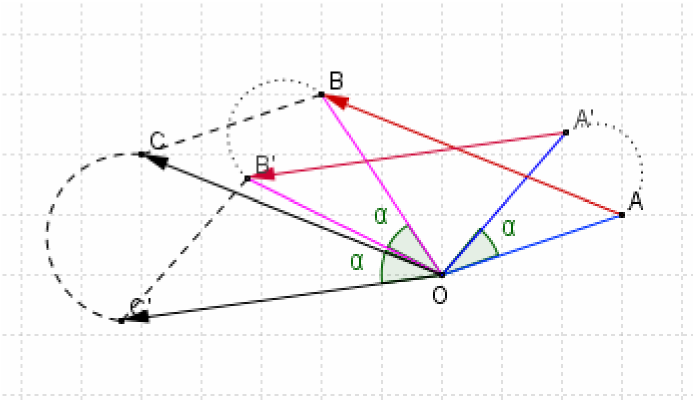
3- الدوران و الزوايا

أ) خاصية أساسية

لتكن A' وB' صورتي A و B بدوران r زاويته α على التوالي .

لتكن C نقطة حيث $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$

لتكن $r(C)=C'$ ومنه $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{A'B'}$



و بالتالي $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)\quad[2\pi]$

وحيث أن $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$ فان $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$

خاصية

ليكن r دورانا زاويته α

إذا كان A' وB' صورتي A و B بالدوران r فان $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$

ب- نتيجة

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{C'D'};\overrightarrow{CD}}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\alpha+\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right)-\alpha\quad[2\pi]$$

إذن $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right)\quad[2\pi]$

لتكن A' وB' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r حيث $A\neq B$ و $C\neq D$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right)\quad[2\pi]$ نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على قيا س الزوايا

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين رأسه A و (C) دائرة محيطة به . نعتبر M نقطة من القوس $[\widehat{AB}]$ الذي لا يحتوي على C . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

بين أن M و M' و C نقط مستقيمية حيث $r(M)=M'$

4- صورة دائرة بدوران

خاصية

صورة دائرة $C(\Omega;R)$ بدوران r هي دائرة $C(\Omega';R)$ حيث $r(\Omega)=\Omega'$

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا و (C) دائرة مارة من A و C . لتكن Q و R نقطتا تقاطع (C) مع (BC) و (CD) على التوالي

بين أن $BQ=DR$ (يمكن اعتبار الدوران r الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$)

تمرين1

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين في A حيث $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$

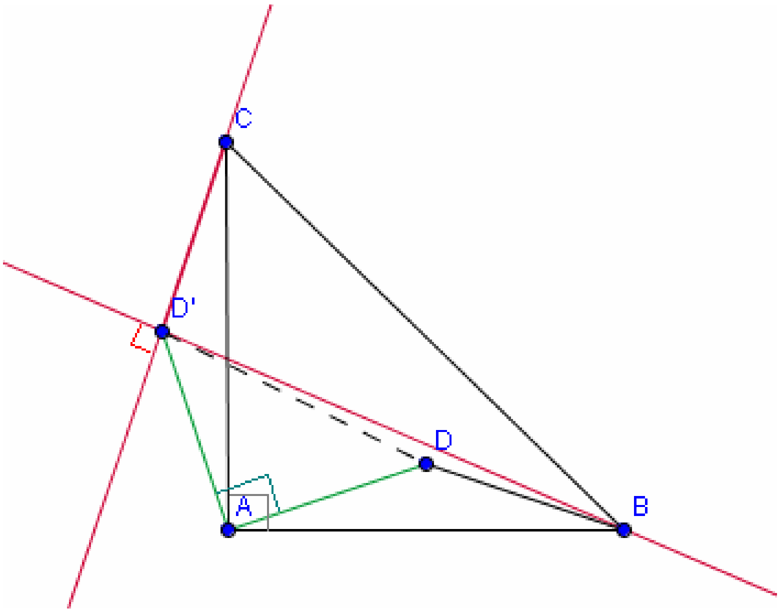
وD نقطة داخل المثلث ABC . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1- أنشئ D' صورة D بالدوران r

2- بين أن $BD=CD'$; $(BD)\perp(CD')$

الحل

1- ننشئ D' صورة D بالدوران r



2- نبين أن $BD=CD'$; $(BD)\perp(CD')$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ و ABC مثلث متساوي الساقين في A و منه $r(B)=C$

و حيث $r(D)=D'$ فان $BD=CD'$ لأن الدوران يحافظ على المسافة

لدينا $r(B)=C$ و $r(D)=D'$ و زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$ و منه $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CD'}\right)=\frac{\pi}{2}$

إذن $(BD)\perp(CD')$

تمرين2

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين وقائم لزاوية في B حيث $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$ زاوية

غير مباشرة. لتكن O منتصف $[AC]$ و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1- أنشئ الشكل

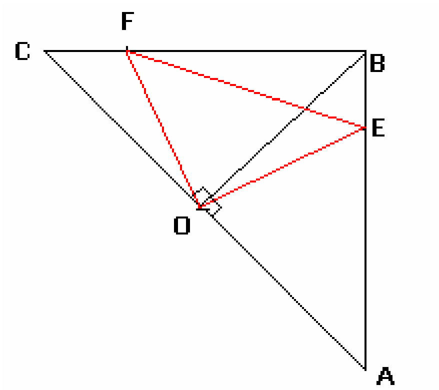
2- حدد صورتي A و B بالدوران r

R

3- نضع $r(E)=E'$ بين أن $E'=F$ استنتج طبيعة المثلث OEF

الحل

1- الشكل



2- نحدد صورتي A و B بالدوران r

لدينا ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في B و O منتصف $[AC]$ ومنه $(OB)\perp(AC)$

و $OA=OB=OC$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ و $OA=OB$ و منه $r(A)=B$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ و $OC=OB$ و منه $r(B)=C$

1- نبين أن $E'=F$ نستنتج طبيعة المثلث OEF

$r(E)=E'$ و $r(A)=B$ و $r(B)=C$ و $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{BE'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

وحيث $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ فان $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE'}$ إذن $E'=F$

ومنه $r(E)=F$ و حيث r دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ فان OEF مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في O

تمرين3

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A و $[2\rho]$ $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\alpha$ و r الدوران الذي مركزه B و زاويته α

1- أنشئ E و F حيث $r(C)=F$; $r(A)=E$

2- بين أن $(EF)\perp(BC)$

3- لتكن $(AC)\cap(EF)=\{I\}$ و $r(I)=J$ و $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

أ- بين أن النقط E و F و J مستقيمية

ب- بين أن E منتصف $[Ij]$

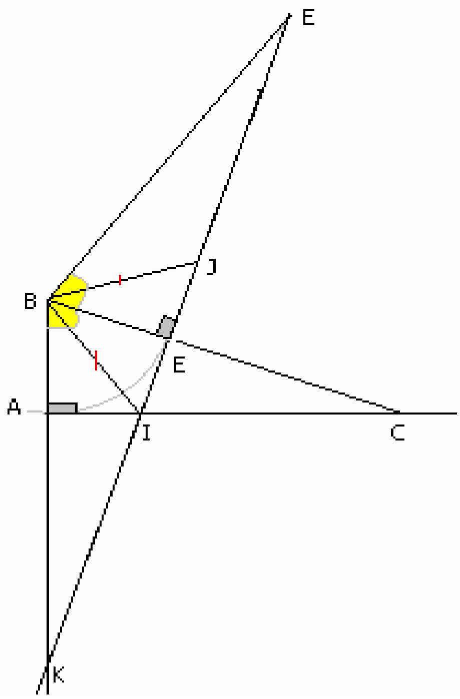
4- لتكن $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$.

بين أن $r(K)=C$

الحل

1- ننشئ E و F حيث $r(C)=F$; $r(A)=E$

R



-2 بين أن $(EF)\perp(BC)$

بما أن $r(C)=F$; $r(A)=E$ و $r(B)=B$ فان $\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

وحيث أن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ فان $\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ ومنه $(EF)\perp(EB)$

لدينا $r(B)=B$ و $r(A)=E$ ومنه $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\alpha\equiv\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right)\quad[2\pi]$ و بالتالي $(BC)=(BE)$

إذن $(EF)\perp(BC)$

-3 أ- نبين أن النقط E و F و J مستقيمية

لدينا I و C و A مستقيمية و $r(C)=F$; $r(A)=E$ و $r(I)=J$

ومنه النقط J و E و F مستقيمية

ب- نبين أن E منتصف $[IJ]$

لدينا $r(I)=J$ و منه BIJ مثلث متساوي الساقين في الرأس B

وحيث أن $(IJ)\perp(EB)$ لأن $(IJ)=(EF)$ ومنه (EB) ارتفاع في المثلث BIJ

و بالتالي (EB) متوسط للمثلث BIJ إذن E منتصف $[IJ]$

-4 نبين أن $r(K)=C$

$(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

لدينا $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}\right)\equiv\alpha\equiv\left(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC}\right)\quad[2\pi]$ ومنه (BC) منصف $\left(\widehat{KBF}\right)$ وحيث أن $(EF)\perp(BC)$

فان المثلث KBF مثلث متساوي الساقين في الرأس B ومنه $BF=BK$

وحيث أن $r(C)=F$ فان $BC=BF$ و بالتالي $BC=BK$

إذن لدينا $\left(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$ و $BC=BK$ ومنه $r(K)=C$

R

الدوران

تمارين و حلول

تمرين1

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين في A حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

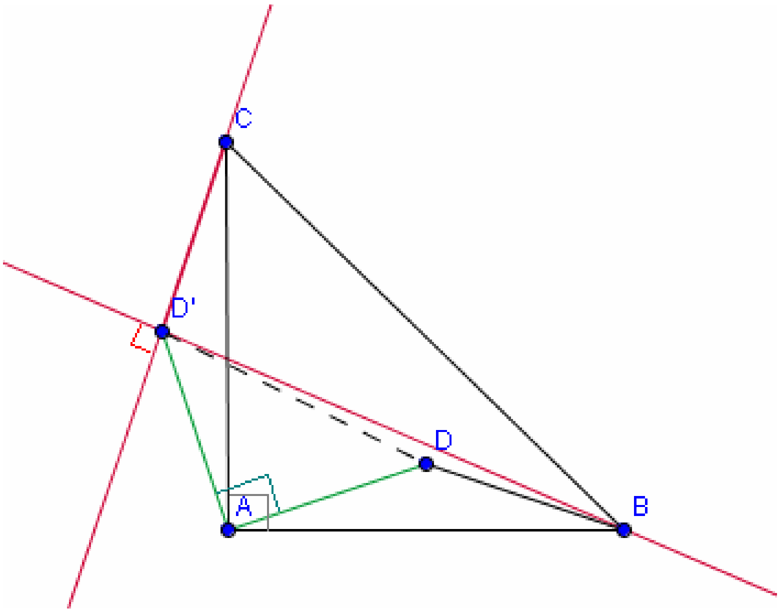
وD نقطة داخل المثلث ABC . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1- أنشئ D' صورة D بالدوران r

2- بين أن $BD=CD'$; $(BD)\perp(CD')$

الحل

1- ننشئ D' صورة D بالدوران r



2- نبين أن $BD=CD'$; $(BD)\perp(CD')$

لدينا $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ و ABC مثلث متساوي الساقين في A و منه $r(B)=C$

و حيث $r(D)=D'$ فان $BD=CD'$ لأن الدوران يحافظ على المسافة

لدينا $r(B)=C$ و $r(D)=D'$ و زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$ و منه $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CD'}\right)=\frac{\pi}{2}$

إذن $(BD)\perp(CD')$

تمرين2

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين وقائم لزاوية في B حيث $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$ زاوية

غير مباشرة. لتكن O منتصف $[AC]$ و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

R

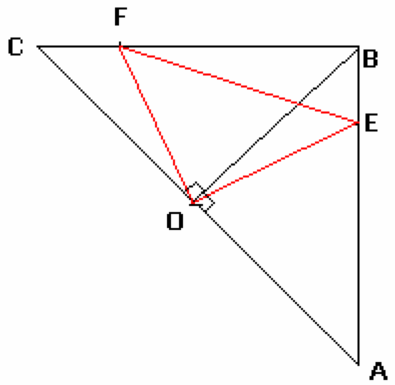
1- أنشئ الشكل

2- حدد صورتي A و B بالدوران r

3- نضع $r(E)=E'$ بين أن $E'=F$ استنتج طبيعة المثلث OEF

الحل

1- الشكل



2- نحدد صورتي A و B بالدوران r

لدينا ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في B و O منتصف $[AC]$ ومنه $(OB)\perp(AC)$

و $OA=OB=OC$

لدينا $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ و $OA=OB$ و منه $r(A)=B$

لدينا $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ و $OC=OB$ و منه $r(B)=C$

1- نبين أن $E'=F$ نستنتج طبيعة المثلث OEF

$r(E)=E'$ و $r(A)=B$ و $r(B)=C$ و $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{BE'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

وحيث $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ فان $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE'}$ إذن $E'=F$

ومنه $r(E)=F$ و حيث r دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ فان OEF مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في O

تمرين3

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A و $[2\rho]$ $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})\equiv\alpha$ و r الدوران الذي مركزه B و زاويته α

1- أنشئ E و F حيث $r(C)=F\quad;\quad r(A)=E$

2- بين أن $(EF)\perp(BC)$

3- لتكن $(AC)\cap(EF)=\{I\}$ و $r(I)=J$ و $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

أ- بين أن النقط E و F و J مستقيمية

ب- بين أن E منتصف $[Ij]$

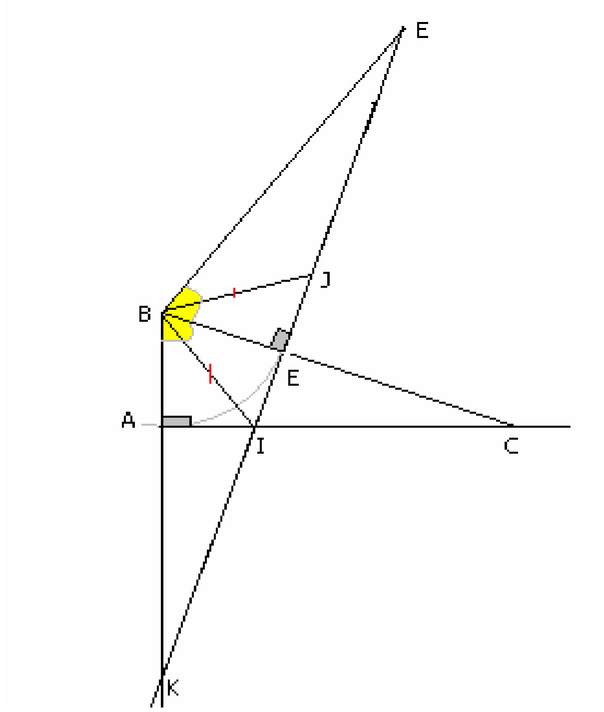
4- لتكن $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$.

بين أن $r(K)=C$

الحل

R

1- ننشئ E و F حيث $r(C)=F\quad;\quad r(A)=E$



2- بين أن $(EF)\perp(BC)$

بما أن $r(C)=F\quad;\quad r(A)=E$ و $r(B)=B$ فان $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB}\right)$

وحيث أن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ فان $\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ ومنه $(EF)\perp(EB)$

لدينا $r(B)=B$ و $r(A)=E$ ومنه $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\alpha\equiv\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right)\quad[2\pi]$ و بالتالي $(BC)=(BE)$

إذن $(EF)\perp(BC)$

3- أ- نبين أن النقط E و F و J مستقيمية

لدينا I و C و A مستقيمية و $r(C)=F\quad;\quad r(A)=E$ و $r(I)=J$

ومنه النقط J و E و F مستقيمية

ب- نبين أن E منتصف $[IJ]$

لدينا $r(I)=J$ و منه BIJ مثلث متساوي الساقين في الرأس B

وحيث أن $(IJ)\perp(EB)$ لأن $(IJ)=(EF)$ ومنه (EB) ارتفاع في المثلث BIJ

و بالتالي (EB) متوسط للمثلث BIJ إذن E منتصف $[IJ]$

4- نبين أن $r(K)=C$

$(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

لدينا $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}\right)\equiv\alpha\equiv\left(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC}\right)\quad[2\pi]$ ومنه (BC) منصف $\left(\widehat{KBF}\right)$ وحيث أن $(EF)\perp(BC)$

فان المثلث KBF مثلث متساوي الساقين في الرأس B ومنه $BF=BK$

وحيث أن $r(C)=F$ فان $BC=BF$ و بالتالي $BC=BK$

إذن لدينا $\left(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$ و $BC=BK$ ومنه $r(K)=C$

R

تمارين

التمرين1

في مستوى موجه نعتبر $ABCD$ مربعا حيث الزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right)$ مباشرة . ليكن r الدوران الذي مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{3}$. E و F نقطتين حيث ABE مثلث متساوي الأضلاع اخل المربع $ABCD$ و CBF مثلث متساوي الأضلاع خارجه و G نقطة حيث $r(G)=D$.

1- أنشئ الشكل

2- أ) بين أن BDG متساوي الأضلاع و استنتج أن $G\in(AC)$

ب) استنتج أن النقط E و F و D مستقيمية.

التمرين2

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين في A حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

و E نقطة داخل المثلث ABC . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

3- أنشئ F صورة E بالدوران r

4- بين أن $BE=CF$; $(BE)\perp(CF)$

التمرين3

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين وقائم لزاوية في B حيث $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$ زاوية غير مباشرة. لتكن O منتصف $[AC]$ و P و Q نقطتين حيث $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1- أنشئ الشكل

2- حدد صورتي A و B بالدوران r

3- بين أن $r(P)=Q$ استنتج طبيعة المثلث OPQ

التمرين4

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا ، ننشئ خارجه المربعات $ACDE$ و $BAFG$ و $CBHI$

1- بين أن المثلث ACI هو صورة المثلث DCB بدوران يجيب تحديده

2- استنتج أن $(AI)\perp(BD)$

3- أثبت أن $(AH)\perp(CG)$

التمرين5

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين في A بحيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\alpha\quad[2\pi]$.

ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته α .

بين أن لكل نقطة M من الدائرة المحيطة بالمثلث ABC النقط M و M' و C مستقيمية حيث $r(M)=M'$

التمرين6

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا و I منتصف $[BC]$،و r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$،

و B' و C' نقطتين حيث $r(B)=B'$ و $r^{-1}(C)=C'$.

1- أنشئ الشكل

2- أ) بين أن $\left(\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC'}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\pi\quad[2\pi]$

ب) بين أن $B'C'=2AI$

R

3- بين أن $(B'C')\perp(BC')$; $(B'C')\perp(AI)$

التمرين7

في مستوى موجه، نعتبر (C) و (C') دائرتين مركزيهما O و O' على التوالي لهما نفس الشعاع و متقاطعان في A و Ω نعتبر r الدوران الذي مركزه Ω و يحول O إلى O'.

1- حدد $r((C))$

2- لتكن $M\in(C)-\{A\}$ و $r(M)=M'$

بين أن M و A و M' مستقيمية.

التمرين8

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا و α عددا حقيقيا غير منعدم. و r_1 الدوران الذي مركزه A و زاويته α و C' نقطة حيث $r_1(C)=C'$ و r_2 الدوران الذي مركزه B و زاويته α.

لتكن A' و C'' حيث $r_2(C)=C''$ و $r_2(A)=A'$

بين أن $AA'C''C'$ متوازي الأضلاع

التمرين9

في مستوى موجه نعتبر المربعين $ABCD$ و $AEFG$ حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

و $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AG})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ و النقط H ; I ; J ; K منتصفات القطع $[BD]$ و $[DE]$ و $[EG]$ و $[GB]$ على التوالي. و r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

1- أ) تحقق أن $\overrightarrow{HI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{HK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DG}$

ب) حدد صورتي B و E بالدوران r

ج) استنتج أن $HIJK$ مربع.

2- لتكن B' و C' مماثلتي B و C على التوالي بالنسبة للمستقيم (AD).

بين أن $r((CD))=(B'C')$

R

الاشتقاق و تطبيقاته

القدرات المنتظرة	
ـ تقريب دالة بجوار نقطة بدالة تآلفية؛ ـ التعرف على أن العدد المشتق لدالة في x_0 هو المعامل الموجه لمماس منحناها في النقطة التي أفصولها x_0؛ ـ التعرف على المشتقة الأولى للدوال المرجعية ـ التمكن من تقنيات حساب مشتقة دالة ـ تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ ـ تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛ ـ تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛ ـ حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية ؛ ـ تطبيق الاشتقاق في حساب بعض النهايات	1 ع رياضيات الدرس 1 الدورة الثانية 12 ساعة 1 ع تجريبية الدرس 3 الدورة الثانية 10 ساعات

1- الاشتقاق في نقطة

أ/نشاط

بينت تجربة الفيزياء هند السقوط الحر لجسم بدن سرعة بدئية أي $v_0 = 0$ في اللحظة $t = 0$

تكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالدالة الزمنية $d = f(t) = 5t^2$ حيث t هي المدة بالثانية و $d = f(t)$ المسافة بالمتر

1- بين أن السرعة المتوسطة بين اللحظتين t و $t+h$ حيث $h \neq 0$ و $t+h \succ 0$ هي $10t + 5h$

2- نضع $t = 0,5s$

أ/ أملئ الجدول التالي

h	-0,01	-0,001	-0,0001	0,0001	0,001	0,01
$t+h$						
السرعة المتوسطة بين t و $t+h$						

ب/ باستعمال الجدول تضنن نهاية السرعة المتوسطة عندما يؤول h الى 0

ج/ أحسب $\lim_{h \to 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ ثم قارنها مع نتيجة ب

العدد $\lim_{h \to 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ يسمى السرعة اللحظية للجسم عند اللحظة $t = 0,5s$

و يسمى أيضا العدد المشتق للدالة f عي النقطة $t_0 = 0,5$

نكتب في هذه الحالة $f'(0,5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$

ب- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 اذا وجد عدد حقيقي l حيث $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$

ونرمز لها.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0 ونرمز له ب $f'(x_0)$.

نكتب $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

ملاحظة: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

R

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

مثال: نعتبر $f(x)=x^2+2x$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 1 و حدد العدد المشتق في 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+3=4$$

إذن f قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1)=4$

ج) الدالة التألفية المماسة لدالة

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

لدينا $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نضع $\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$ ، $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

$$\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\Leftrightarrow f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)\qquad /\ \lim_{x\to x_0}(x)=0$$

أي أنه بجوار x_0 لدينا $f(x)\simeq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

الدالة $x\to f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة x_0

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 فان الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة x_0

هي الدالة $g:x\to f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تمرين نعتبر $f(x)=\sqrt{x}$

1) حدد الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة 1

2) استنتج قيمة مقربة لكل من $\sqrt{0,99}$ و $\sqrt{1,001}$

الجواب

/1 لدينا $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

ومنه الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة 1 هي الدالة $g:x\to\frac{1}{2}(x-1)+1$

أي $g:x\to\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

/2لدينا $099\approx 1$ ومنه $\sqrt{0,99}=f(0,99)\simeq g(0,99)=0,5\times 099+0,5=....$

لدينا $1,001\approx 1$ ومنه $\sqrt{1,001}=f(1,001)\simeq g(1,001)=0,5\times 1,001+0,5=....$

2 – الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x\to\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليمين في x_0 و نرمز لها بـ $f_d'(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق ل f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0-\alpha;x_0]$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 نرمز لها ب $f_g'(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق ل f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ملاحظة

$$f'_g(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad و \quad f'_d(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ب – خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

تمرين نعتبر $f(x)=x^2+|x|$ أدرس قابلية اشتقاق f في0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}x+1=1$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $f_d'(0)=1$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}x-1=-1$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يسار 0 و $f_g'(0)=-1$

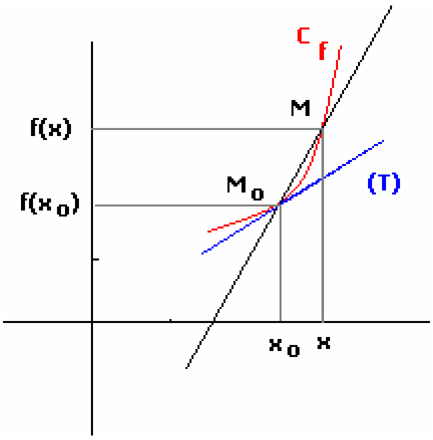
لدينا $f_d'(0)\neq f_g'(0)$ ومنه f قابلة للاشتقاق في0

4- التأويل الهندسي – معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0 و C_f منحناها

نعتبر $M_0(x_0;f(x_0))$ و $M(x;f(x))$ نقطتين من C_f



المعامل الموجه للمستقيم (MM_0) هو $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

نلاحظ عندما تقترب M من M_0 (أي x تؤول إلى x_0) فان $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تؤول إلى $f'(x_0)$

و بالتالي المستقيم (MM_0) يدور حول M_0 إلى أن ينطبق مع المستقيم (T) ذا المعامل الموجه $f'(x_0)$.

المستقيم (T) مماس للمنحنى C_f

معادلة (T) هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحناها

قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول x_0

معادلته $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

R

تمرين: نعتبر $f(x)=x^3$

أدرس قابلية اشتقاق f في 2 و حدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأفصول2

الجواب

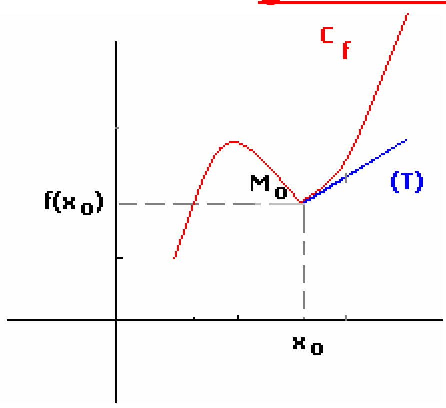
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4=12$$

اذن f قابلة للاشتقاق في 2 و $f'(2)=12$

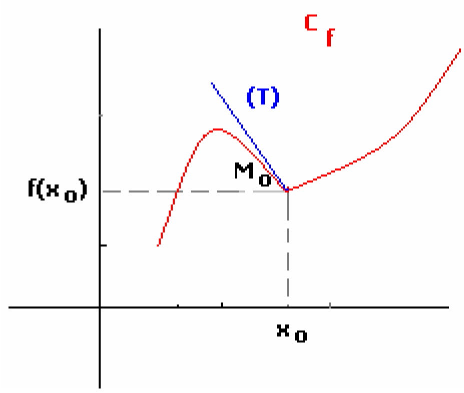
ومنه معادلة المماس هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=12(x-2)+8$

$y=12x-16$

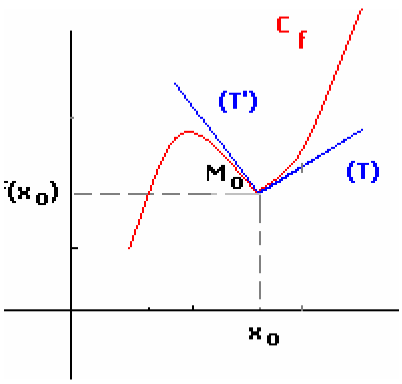
ب- نصف المماس



$$\begin{cases}(T): y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\geq x_0\end{cases}$$



$$\begin{cases}(T): y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\leq x_0\end{cases}$$



نقطة مزواة M_0

$$\begin{cases}(T): y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) & x\geq x_0\\ (T'): y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) & x\leq x_0\end{cases}$$

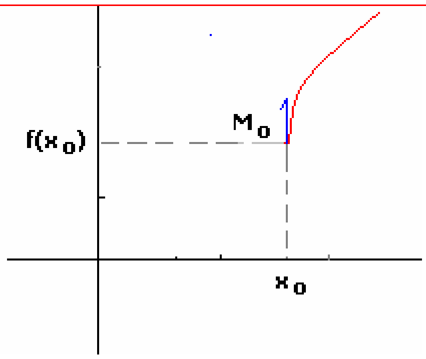
خاصية

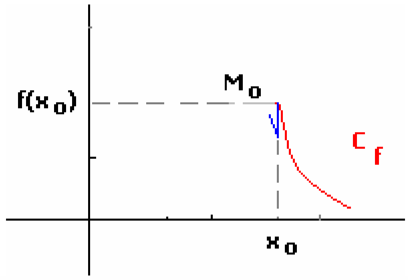
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الافصول x_0 معامله الموجه $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)

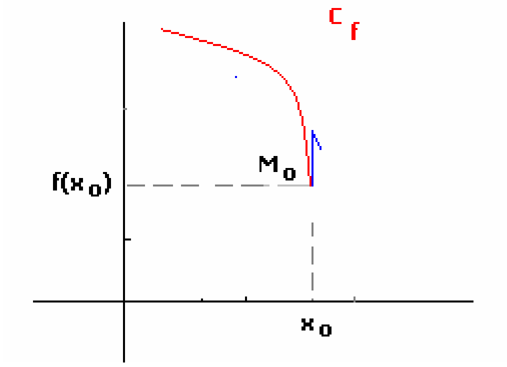
R

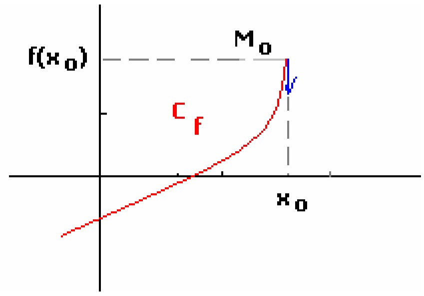
خاصية

إذا كانت نهاية $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ هي $\pm\infty$ لما $x \to x_0$ (على اليمين في x_0 أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0 (نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0)









تمرين نعتبر $f(x)=|x^2-1|$ و $g(x)=\sqrt{x}$

أدرس قابلية اشتقاق f على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا

أدرس قابلية اشتقاق g على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

الجواب

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x+1=2 \quad *$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يمين1 و $f_d'(1)=2$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-x-1=-2$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يسار1 و $f_g'(1)=-2$

نلاحظ $f_d'(1)\neq f_g'(1)$ اذن f غير قابلة للاشتقاق في 1

(C_f) يقبل نصف مماس على يمين 1 معادلته $y=2(x-1)$.

(C_f) يقبل نصف مماس على يسار 1 معادلته $y=-2(x-1)$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty \quad *$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على يمين0 و (C_g) يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

R

5- الدالـــة المشتقة

أ- تعاريف

تعريف1

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نـقطة من I .

تعريف2

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ و على يمين a و على يسار b .

ملاحظة : بالمثل نعرف الاشتقاق على $]a;b]$ و على $[a;b[$

تعريف3

لتكن قابلة للاشتقاق على المجال I

الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ f' .

مثال : نعتبر $f(x)=x^2$

ندرس قابلية اشتقاق f و نحدد الدالة المشتقة

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} x+x_0 = 2x_0$ ومنه قابلة لاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)=2x_0$

اذن f قابلة للاشقاق في $\mathbb{R}$ و $f'(x)=2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ملاحظة:

يكون للمنحنى الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I مماس عند كل نقطة من هذا المنحنى

ب- المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية

لتكن f قابلة للاشتقاق مجال I

إذا الدالة f' قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية و نرمز لها بالرمز f''

إذا كانت f'' قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثالثة أو المشتقة من الرتبة 3 و نرمز لها بالرمز f''' أو $f^{(3)}$

و هكذا ....

نرمز للدالة المشتقة من الرتبة n حيث $n \in \mathbb{N}^*$ بالرمز $f^{(n)}$

مثال : نعتبر $f(x)=x^2$

رأينا أن $f'(x)=2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ وحيث $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = 2$ فان $f''(x)=2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$

$f+g$ و $f\times g$ و λf و f^n دوال قابلة للاشتقاق على المجال I

و اذا كانت g لا تنعدم على I فان $\dfrac{1}{g}$ و $\dfrac{f}{g}$ قابلتان للاشتقاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)'=\lambda f'(x)$$

R

$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $\forall x \in I$ بحيث g لا تنعدم على I

-* لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$\left(f^n\right)'(x) = n\left(f(x)\right)^{n-1} \times f'(x)$ $\forall x \in I$ (نبين ذلك بالترجع)

نبرهن $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$(f \times g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x)$$

و حيث $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ و $\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ و $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

فان $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

* الدالة الثابتة: $f(x) = k$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to x$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to ax + b$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = a$ $\forall x \in \mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = nx^{n-1}(x)' = nx^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x \times x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

و $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

* الدالة $f : x \to \sqrt{x}$ لتكن $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

f غير قابلة للاشتقاق في 0

R

* الدالة $f: x \to \sin x$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(2\cos(x_0+h)\right)\times 2\times\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x_0$$

إذن

$x \to \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\sin'(x)=\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f: x \to \cos x$

$x \to \cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\cos'(x)=-\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f: x \to \tan x$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\tan' x=\frac{(\sin x)'(\cos x)-(\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

إذن $\tan' x=1+\tan^2 x \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

$x \to \tan x$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ و $\tan' x=1+\tan^2 x \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

نتائج

* الدالة الحدودية قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}$
* الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها

أمثلة

نعتبر $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2+x-2}$

$D_f=\mathbb{R}-\{1;-2\}$

f الدالة الجدرية ومنه f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{1;-2\}$

و $f'(x)=\dfrac{(3x^2-3)(x^2+x-2)-(2x+1)(2x^3-3x)}{(x^2+x-2)^2}=....$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1;-2\}$

8- مشتقة $f(ax+b)$ - مشتقة $\sqrt{f}$

مبرهنة

ليكن المجال J صورة المجال I بالدالة التألفية $x\to ax+b$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على J فان $g: x\to f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I و $g'(x)=af'(ax+b) \quad \forall x\in I$

مثال: نعتبر $f(x)=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=5\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

خاصية

لتكن f دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I و $\forall x \in I \quad \left(\sqrt{f}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

مثال: نعتبر $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$

$D_f = [0;1]$

$x \to -x^2 + x$ دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال $]0;1[$

إذن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $\forall x \in]0;1[\quad f'(x) = \dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}}$

جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	a
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

تمارين

1- أدرس اشتقاق f و حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

* $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4$ * $f(x) = \dfrac{5}{x^2}$ * $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x-2}$ * $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-x}$

* $f(x) = \left(x^2 + x\right)^5$ * $f(x) = (\cos x)^5$ * $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x - \sin x}$

* $\begin{cases} f(x) = x^2 + x & x \le 0 \\ f(x) = x^3 - x^2 & x \succ 0 \end{cases}$ * $f(x) = x^2 + x|x|$

2- نعتبر $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

أ- بين أن منحنى f يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y = -3x$

ب- أكتب معادلتي هذين المماسين.

9- تطبيقات الدالة المشتقة

a- قابلية الاشتقاق و المطراف

R

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$

نعتبر f قابلة للاشتقاق في x_0 و تقبل مطرافا في x_0

لنفترض أن f تقبل قيمة قصوى نسبية عند x_0

ومنه يوجد مجال مفتوح J مركزه x_0 ضمن I حيث $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in J$

f قابلة للاشتقاق في x_0 ومنه $f'(x_0) = f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

أي $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

و حيث $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in J$ فان $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \quad \forall x \ge x_0$ و $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \quad \forall x \le x_0$

ومنه $f_g'(x_0) \ge 0 \quad ; \quad f_d'(x_0) \le 0$ أي أن $f'(x_0) \ge 0 \quad ; \quad f'(x_0) \le 0$ اذن $f'(x_0) = 0$

(إذا كانت f تقبل قيمة دنيا نسبية عند x_0 نتبع نفس الخطوات للحصول على نفس النتائج)

مبرهنة

لـتكن f دالة معرفة على مجال فتوح I و $x_0 \in I$

اذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و تقبل مطرافا في النقطة x_0 فان $f'(x_0) = 0$

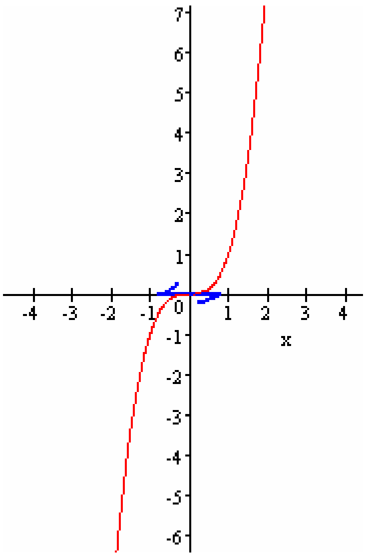
ملاحظة:

المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية

مثال $f(x) = x^3 \quad ; \quad x_0 = 0$

f قابلة للاشتقاق في x_0 =0 و $f'(0) = 0$

و مع ذلك f لا تقبل مطرافا عند 0



b- الاشتقاق ورتابة دالة

مبرهنة

لـتكن f قابلة للاشتـــــقاق على مجال I

تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط اذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة علىI

أي $f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in I$ (f' موجبة قطعا على I أي $f'(x) \succ 0 \quad \forall x \in I$)

تكون f تناقصية (قطعا) على I اذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة علىI

أي $f'(x) \le 0 \quad \forall x \in I$ (f' سالبة قطعا على I أي $f'(x) \prec 0 \quad \forall x \in I$)

تكون f ثابتة على I إذا كانت الدالة المشتقة f' منعدمة علىI أي $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

مثال

نعتبر $f(x) = x^3 - 6x + 1$

أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيرا ت f (في جدول التغيرات يجب تحديد النهايات)

حدد مطاريف f ان وجدت

الجواب

* مجموعة تعريف $D_f = \mathbb{R}$

* $f(x) = x^3 - 6x + 1$ ومنه $f'(x) = (x^3)' - (6x)' + (1)' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

اشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 - 2$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		+	0	-	0	+	

ومنه f' موجبة على كل $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ و $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ و سالبة على $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

ومنه f تزايدية على كل $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ و $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ و تناقصية على $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$10\sqrt{2}+1$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن f تقبل قيمة قصوى عند $-\sqrt{2}$ و دنيا عند $\sqrt{2}$

<u>**ملاحظة**</u> لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

f تقبل مطرافا في x_0 إذا و فقط إذا كانت f' تنعدم في x_0 و تتغير إشارتها في مجال مفتوح يحتوي على x_0

10- المعادلة التفاضلية $y''+\omega^2 y=0$

تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية

تعريف

ليكن ω عدد ا حقيقيا غير منعدم

المعادلة $y''+\omega^2 y=0$ تسمى معادلة تفاضلية.

كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة $y''+\omega^2 y=0$

أمثلة $y''+4y=0$ و $y''+\sqrt{2}y=0$ و $y''+\frac{3}{2}y=0$ معادلات تفاضلية

خاصية

ليكن ω عدد ا حقيقيا غير منعدم

الحل العام للمعادلة $y''+\omega^2 y=0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كمايلي $x\to\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$

حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

ملاحظة

حل المعادلة $y''+\omega^2 y=0$ يرجع إلى تحديد الحل العام لهذه المعادلة

مثال

حل المعادلة $y''+4y=0$

لدينا $\omega^2=4$ ومنه $\omega=2$ يمكن أخذ $\omega=-2$ هذا لن يغير مجموعة الحلول

الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y:x\to\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

معادلة تفاضلية خاصة

حل المعادلة $y''=0$

إذا كان $y''=0$ فان y' دالة ثابتة ومنه الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y:x\to ax+b$

حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

R

سلسلة الاشتقاق و تطبيقاته

تمرين1

باستعمال التعريف أحسب العدد المشتق لدالة f في النقطة x_0 في الحالات التالية

1/ $f(x)=x^3+x^2-1 \ ; \ x_0=1$ 2/ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1} \ ; \ x_0=2$

3/ $f(x)=x+\dfrac{1}{x} \ ; \ x_0=-1$ 4/ $f(x)=\sin x \ ; \ x_0=\dfrac{\pi}{3}$

5/ $f(x)=\sin x+\tan x \ ; \ x_0=0$

تمرين2

حدد العدد المشتق على اليمين و العدد المشتق على اليسار للدالة f في النقطة x_0 في الحالات التالية

1/ $f(x)=x+x|x| \ ; \ x_0=0$ 2/ $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{1+|x|} \ ; \ x_0=0$

3/ $f(x)=|x^2+2x| \ ; \ x_0=0$

تمرين3

أدرس اشتقاق f في النقطة x_0 في الحالات التالية

1/ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+x-2}{x-1} & x\neq 1 \\ f(1)=4 \end{cases} \ ; \ x_0=1$ 2/ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases} \ ; \ x_0=0$

3/ $f(x)=x+|x-1| \ ; \ x_0=1$ 4/ $f(x)=x\sqrt{x} \ ; \ x_0=0$

5/ $f(x)=(x-2)|x-2| \ ; \ x_0=2$ 6/ $f(x)=x^2|\sin x| \ ; \ x_0=0$

7/ $\begin{cases} f(x)=\sin x & x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{2-2\cos x}{x} & x\prec 0 \end{cases} \ ; \ x_0=0$ 8/ $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases} \ ; \ x_0=0$

9/ $f(x)=\sqrt{x^2-2x} \ ; \ x_0=2$

تمرين4

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f ثم حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية

1/ $f(x)=5x^4+x^2-x+2$ 2/ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 3/ $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$

4/ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x}$ 5/ $f(x)=x\sin x$ 6/ $f(x)=\left(x^2-2\right)^5$

7/ $f(x)=|x^2-x|$ 8/ $f(x)=(\sin x)(\cos(3x+4))$

9/ $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\sin x}$ 10/ $f(x)=\sqrt{-2x+3}$ 11/ $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

تمرين5

نعتبر f و g دالتين معرفتين بـ $f(x)=\tan x$ و $g(x)=x^3-x$

1- حدد الدالة التالفية المماسة لدالة f في النقطة 0 و أعط قيمة مقربة لـ$f(0,001)$ و $f(-0,99)$

2- حدد معادلة المماس للمنحنى لدالة g في النقطة 2 و أعط قيمة مقربة لـ$g(2,001)$

R

تمرين6

نعتبر $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

بين أن المنحنى C_f يقبل مماسين موازيين االمستقيم الذي معادلته $y=-3x$ و أكتب معادلتيهما.

تمرين7

أدرس تغيرات الدالة f و استنتج مطاريفها ان وجدت في الحالات التالية

1/ $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$ 2/ $f(x)=x^2(x-1)^2$

3/ $f(x)=x^3-|x|$ 4/ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x-5}$

5/ $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ 6/ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

تمرين8

نعتبر f و g دالتين معرفتين بـ $f(x)=x-\sin x$ و $g(x)=-1+\dfrac{x^2}{2}+\cos x$

بين أن $g(x)\geq 0$; $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[0;+\infty[$

تمرين9

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sin x$

أحسب المشتقة من الرتبة n للدالة f

تمرين10

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=|x|-\dfrac{x}{x^2-1}$

1- أ- حدد D_f و $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$

ب- حدد نهاية f عند 1 و -1 و أو ل النتائج هندسيا

2- أدرس اشتقاق في 0 و أول النتيجة هندسيا

3- أ- حدد $f'(x)$ لكل x من $D_f-\{0\}$

ب- أدرس تغيرات f

4- حدد معادلة المماس لـ C_f في النقطة ذات الافصول 2

التمثيل المبياني لدالة

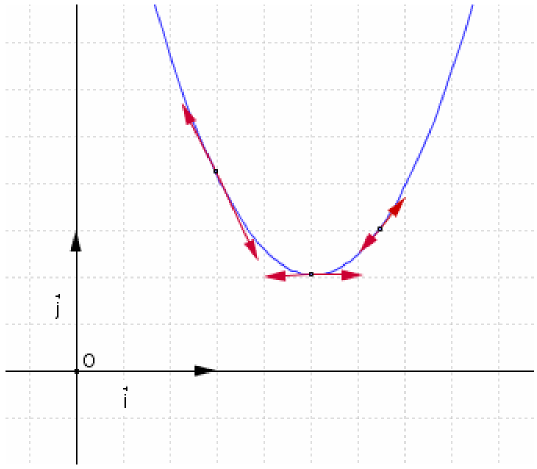
-1 تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

1-1 تعـريف

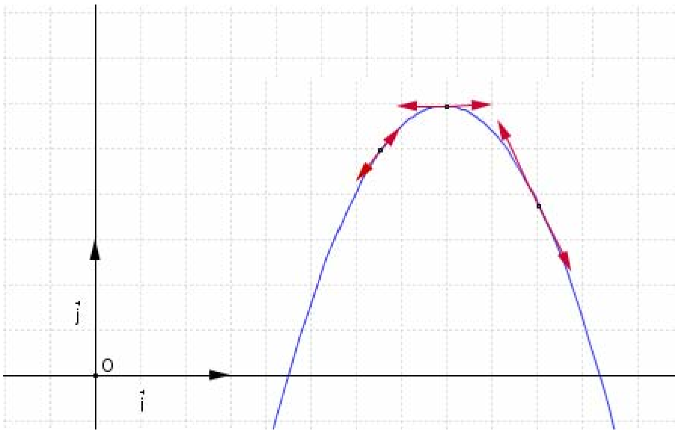
لـتكن f قابـلة للاشتــــقاق على مجال I

نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماسـاته

نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماسـاته



محدب

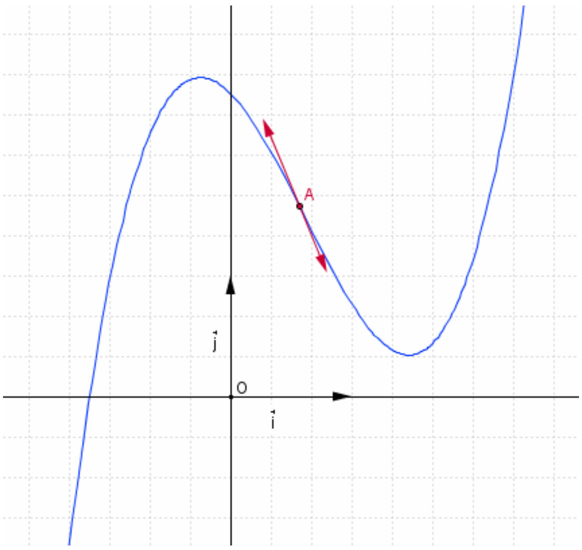


مقعر

2-1 تعــريف

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتـــقاق على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.

نقول ان النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) اذا تغير تقعر المنحنى (C_f) عند A



3-1 خــاصيات

f دالة قابلة الاشتــــــقاق مرتين على مجال I

* إذا كانت "f موجبة علىI فان (C_f) يكون محدبا على I
* إذا كانت "f سالبة علىI فان (C_f) يكون مقعرا على I
* اذا كانت "f تـنعدم في x_0 من الـمجال I وكان يـوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة "f على $[x_0,x_0+\alpha[$ مخالـفة لإشارة "f على $]x_0-\alpha,x_0]$ فان $M_0(x_0;f(x_0))$ نقـطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ملاحظـــــة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

تمرين $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ و $g(x)=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$

-1 أدرس تقعر C_f و استنتج أن النقطة A ذات الأفصول 1 نقطة انعطاف للمنحنى C_f

2 - أدرس تقعر C_g و حدد نقط انعطاف المنحنى C_g

-2 الفروع اللانهـــائية

1-2 تعريف

إذا آلت إحدى إحداثـــيتي نقـطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

R

2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

أ- المقارب الموازي لمحور الأراتيب

تعريف

إذا كان $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب ل C_f

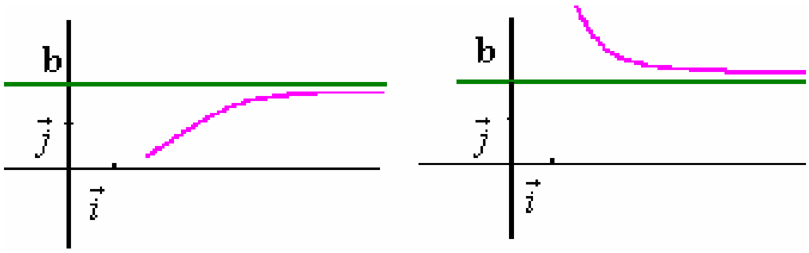
مثال $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

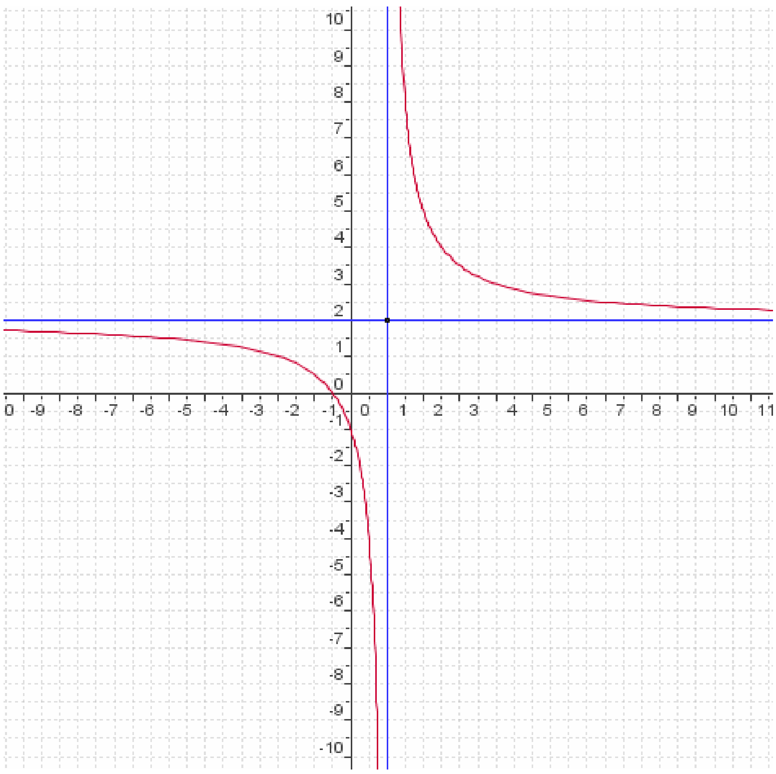
لدينا $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ و منه المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى

ب- المقارب الموازي لمحور الأفاصيل

تعريف

إذا كان $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذا المعادلة y =b مقارب ل C_f.





مثال $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

و منه المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى

R

ج- المقارب المائل

تعريف

يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

أو $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

خاصية

يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كانت توجد دالة h حيث يكون $f(x)=ax+b+h(x)$ و ($\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$)

مثال

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$$

لدينا $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x-1}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-1}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى(بجوار $+\infty$)

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x-1}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى(بجوار $-\infty$)

في كثير من الأحيان يصعب كتابة على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ حيث $\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=0$

تقنية تحديد مقارب مائل

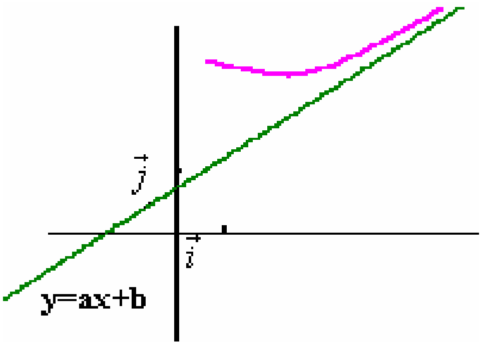
لنفترض أن $f(x)=ax+b+h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$

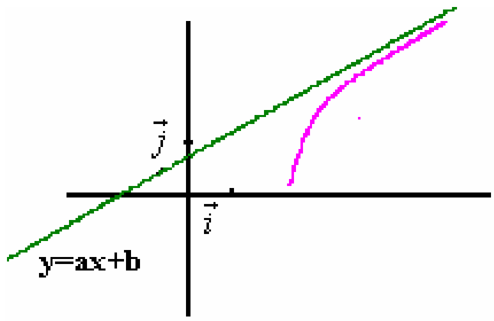
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x}h(x)\right)=a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}(b+h(x))=b$$

عكسيا إذا كان $\left(\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b\right)$ فان $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

يكون المستقيم ذو المعادلة y = ax + b مقارب لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b\right) \quad \text{أو} \quad \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ ;\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b\right)$$





ملاحظة دراسة إشارة (f (x) – (ax + b)) تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

مثال

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x-2}$$

حدد المقارب المائل بجوار $+\infty$ ثم بجوار $-\infty$

R

2-3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

ب - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الافاصيل

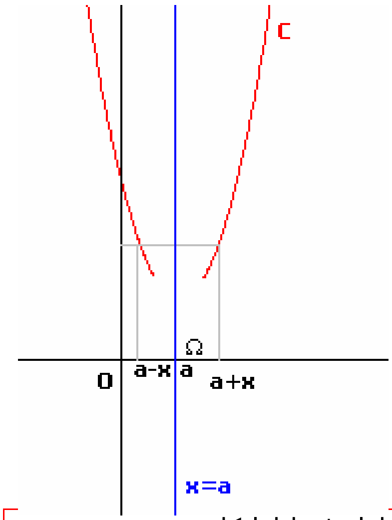
ج - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذا المعادلة y= ax

بصفة عامة

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب.

3 - مركز تماثل – محور تماثل

3-1 محور تماثل



اذا كان (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $x=a$ كمحور تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\Omega(a;0)$

هي على شكل $Y=f(a+X)=\varphi(X)$ حيث φ دالة زوجية و $\begin{cases} X=x-a \\ Y=y \end{cases}$

أي أن $\varphi(-X)=\varphi(X)$ $\quad \forall X\in D_\varphi$

أي $f(a-X)=f(a+X)$ $\quad \forall X\in D_\varphi$

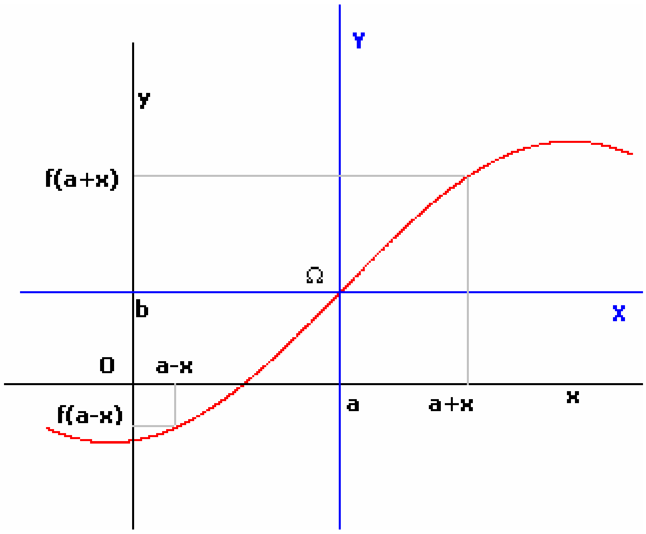
بما أن $X=x-a$ فان $f(2a-x)=f(x)$ $\quad \forall x\in D_f$

خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x\in D_f \qquad (2a-x)\in D_f \quad ; \quad f(2a-x)=f(x)$$

3-2 مركز تماثل



اذا كان (C_f) يقبل النقطة $\Omega(a;b)$ كمركز تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$

هي على شكل $Y+b=f(a+X)$

أي $Y=f(a+X)-b=\varphi(X)$

حيث φ دالة فردية و $\begin{cases} X=x-a \\ Y=y-b \end{cases}$

أي أن $\varphi(-X)=-\varphi(X)$ $\quad \forall X\in D_\varphi$

أي $f(a-X)-b=-f(a+X)+b$ $\quad \forall X\in D_\varphi$

أي $f(a-X)=2b-f(a+X)$ $\quad \forall X\in D_\varphi$

بما أن $X=x-a$ فان $f(2a-x)=2b-f(x)$ $\quad \forall x\in D_f$

خاصية

في معلم ما,تكون النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x\in D_f \qquad (2a-x)\in D_f \quad ; \quad f(2a-x)=2b-f(x)$$

تمرين

R

1) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ بين أن المستقيم $(D): x=1$ محور تماثل للمنحنى (C_f)

2) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1}$ بين أن النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

4- الدالة الدورية

1-4 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث

$\forall x \in D_f \qquad x+T \in D_f \;;\quad x-T \in D_f \qquad f(x+T)=f(x)$

العدد T يسمى دور الدالة f. اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالةf

أمثلة

* الدالتان $x \to \cos x$ و $x \to \sin x$ دوريتان و دورهما 2π
* الدالة $x \to \tan x$ دورية دورها π
* الدالتان $x \to \cos ax$ و $x \to \sin ax$ (حيث $a \neq 0$) دوريتان و دورهما $\dfrac{2\pi}{|a|}$
* الدالة $x \to \tan ax$ (حيث $a \neq 0$) دورية دورها $\dfrac{\pi}{|a|}$

تمرين

حدد دورا للدوال $x \to \cos x - \sin x$ و $x \to 3-\cos\dfrac{1}{4}x$ و $x \to \tan 3x$ و $x \to \cos^2 x$

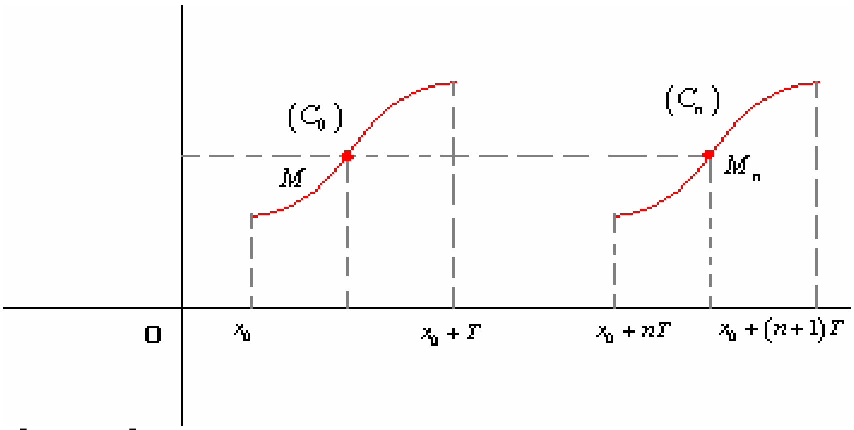
4- 2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $\qquad f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x \in D_f, \forall n \in \mathbb{Z}$

(نبين الخاصية بالاستدلال بالترجع)

3-4 التمثيل المبياني لدالة دورية

لتكن f دورية دورها T و (C_f) منحناها في مستوى منسوب ال معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$



منحنى الـدالـة f على $D_f \cap [x_0+nT; x_0+(n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f \cap [x_0, x_0+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT \cdot \vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسبـي.

ملاحظة:

لإنشاء منحنى دالة دورية يكفي إنشائه جزئه على مجال من نوع $I_0 = D_f \cap [x_0, x_0+T[$

استنتاج المنحنى باستعمال الإزاحة $t_{Tn\vec{i}}$

أمثلة

* دالة $x \to \cos x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $[-\pi;\pi]$

و حيث أن $x \to \cos x$ زوجية فنقتصر دراستها على $[0;\pi]$

$\forall x \in [0;\pi] \qquad (\cos x)' = -\sin x$

جدول التغيرات

x	$0 \qquad\qquad\qquad \pi$
$\cos x$	$1 \searrow -1$

R

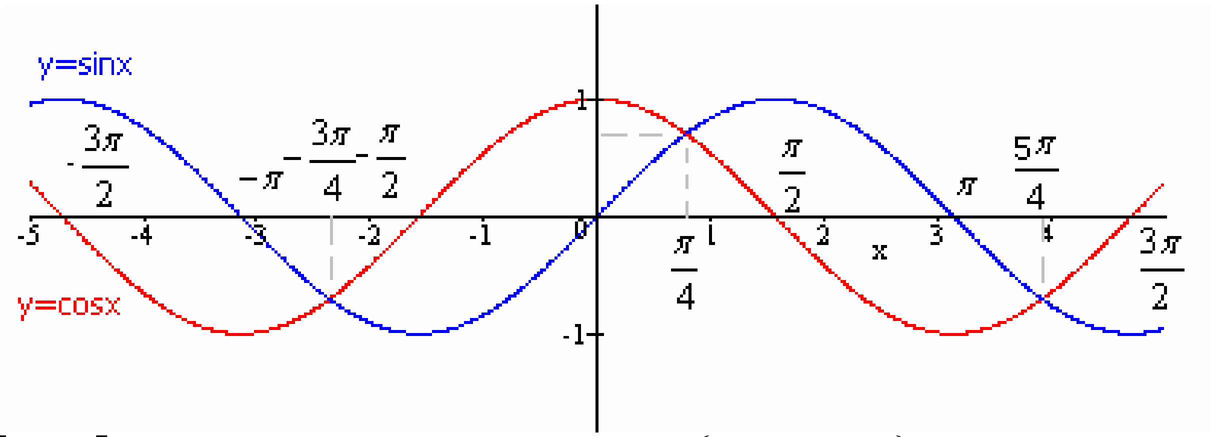
دالة $x \to \sin x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $]-\pi;\pi]$

و حيث أن $x \to \sin x$ فردية فنقتصر دراستها على $[0;\pi]$

$$\forall x \in [0;\pi] \qquad (\sin x)' = \cos x$$

جدول التغيرات

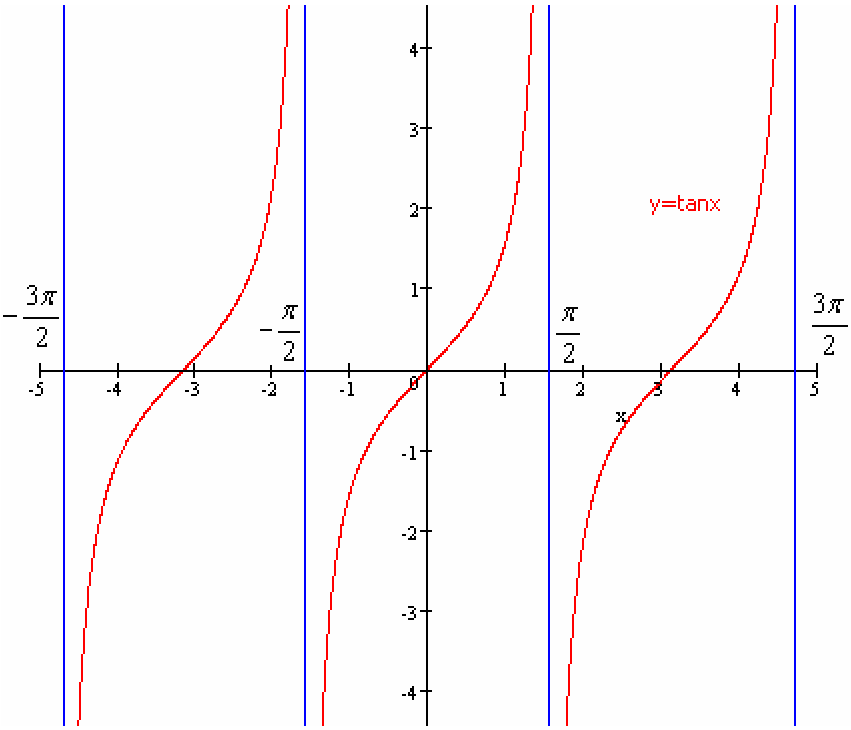
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



** دالة $x \to \tan x$ حيز تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ و دورية ودورها π إذن يكفي دراستها على $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

و حيث أن $x \to \tan x$ فردية زوجية فنقتصر دراستها على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\qquad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$



جدول التغيرات

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

R

تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة f في غالب الأحيان نتبع الخطوات التالية

- تحديد مجموعة التعريف ثم تحديد مجموعة الدراسة (خاصة إذا كانت f زوجية أو فردية أو دورية)
- دراسة الاتصال و الاشتقاق و تحديد الدالة الاشتقاق و دراسة إشارتها
- وضع جدول التغيرات
- دراسة الفروع الانهائية
- دراسة التقعر ان كان ذلك ضروريا و تحديد نقط انعطاف إن وجدت
- إنشاء المنحنى

تمرين

أدرس ومثل مبيانيا الدالة f في الحالات التالية

$a) : f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad b) : f(x) = \dfrac{2|x|}{x^2+1}$ $\qquad c) : f(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

تمارين و حلولها

تمرين1

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ) حدد D_f

ب) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ج) حدد $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

2- أ) بين أن $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \quad \forall x \in D_f$

ب) أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

3- حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0

4- بين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

5- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- أنشئ (C_f)

الجواب

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

أ) نحدد D_f

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

ب) نحدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - 1 + \frac{1}{x-2} = -\infty$$

ج) حدد $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} x - 1 + \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} x - 1 + \frac{1}{x-2} = -\infty$$

R

ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى $\left(C_f\right)$

2- أ) نبين أن $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$ $\forall x\in D_f$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}\quad f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$

f دالة قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{2\}$ (لأن f دالة جذرية)

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}\quad f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

ب) ندرس تغيرات f و نعطي جدول تغيراتها

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-3)(x-1)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	- ||		-	0	+	
f	$-\infty$ ↗		-1	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

3- نحدد معادلة المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الأفصول 0

معادلة المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الأفصول 0 هي $y=f'(0)x+f(0)$

أي هي $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2}$

4- نبين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى $\left(C_f\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}\qquad 4-x\in\mathbb{R}-\{2\}$

و $f(4-x)=3-x+\dfrac{1}{2-x}\quad ;\quad 2-f(x)=2-x+1-\dfrac{1}{x-2}=3-x+\dfrac{1}{2-x}$

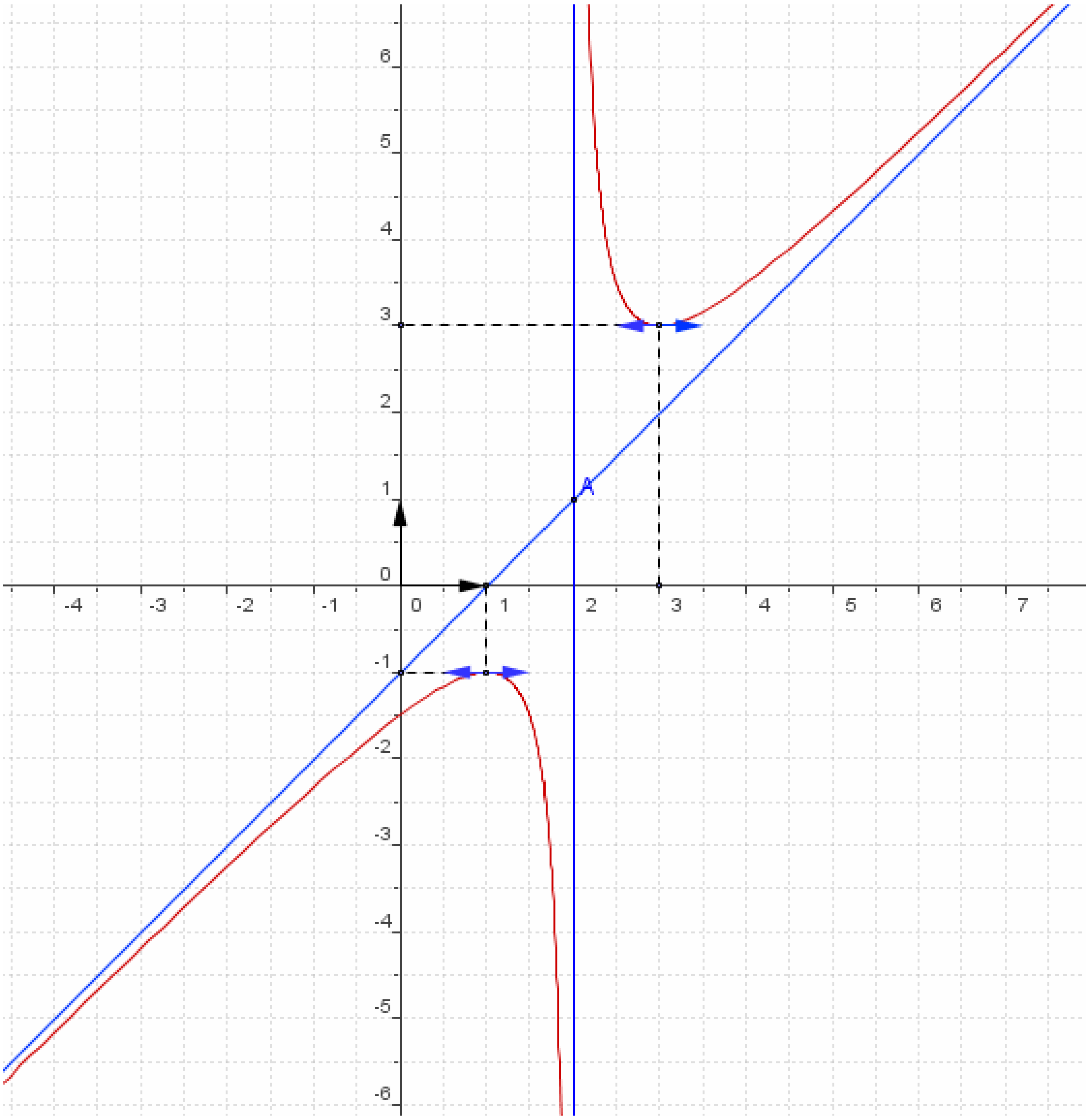
ومنه $f(4-x)=2-f(x)$ إذن $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى $\left(C_f\right)$

5- نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0\quad;\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- ننشئ $\left(C_f\right)$



تمرين2

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f\left(x\right)=1+\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$

1- حدد D_f و حدد نهايات f عند محدات D_f

2- حدد $f'\left(x\right)$ لكل x من D_f

3- أدرس تغيرات f

4- أ- بين أن C_fيقبل $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف.

ب- بين أن $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

د- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

5- أ- أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ المنحنى C_f

الجواب

$$f\left(x\right)=1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

2- نحدد D_f و نحدد نهايات f عند محدات D_f

ليكن $x\in\mathbb{R}$

R

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \quad et \quad x \neq 2$

إذن $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} 1 + \dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = 1$ لأن $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} \dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} \dfrac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} \dfrac{-2}{x} = 0$

لدينا $\lim\limits_{x\mapsto 2} x^2 - x - 2 = 0$ $\quad \lim\limits_{x\mapsto 2} 1-2x = -3$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

ومنه $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 2^+} 1 + \dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 2^-} 1 + \dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\mapsto -1} x^2 - x - 2 = 0$ $\quad \lim\limits_{x\mapsto -1} 1-2x = 3$

ومنه $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto -1^+} 1 + \dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto -1^-} 1 + \dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty$

-2 نحدد $f'(x)$ لكل x من D_f

$$f'(x) = \frac{(1-2x)'(x^2-x-2)-(x^2-x-2)'(1-2x)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-x-2)-(2x-1)(1-2x)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2x+4+4x^2-4x+1}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}$$

-3 ندرس تغيرات f

$\forall x \in D_f \qquad f'(x) = \dfrac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x^2-2x+5$

$\Delta = 4 - 40 = -36$

اذن $2x^2-2x+5 \succ 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

جدول التغيرات f

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	||	+	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

-4 أ- نبين أن C_f يقبل $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف.

R

$$\forall x \in D_f \qquad f''(x)=\frac{-2(2x-1)\left(x^2-x+7\right)}{\left(x^2-x-2\right)^3}$$

$f''(x)$ تنعدم في $\frac{1}{2}$ مع تغيير الإشارة إذن C_f يقبل $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف

ب- نبين أن $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

$$\forall x \in D_f \qquad 1-x \in D_f$$

$$f(1-x)=1+\frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2-(1-x)-2}=1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

$$2-f(x)=2-1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}=1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

إذن $f(1-x)=2-f(x)$ ومنه $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

د- نحدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I هي $y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$

أي $y=\frac{8}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$ ومنه $y=\frac{8}{9}x+\frac{5}{9}$

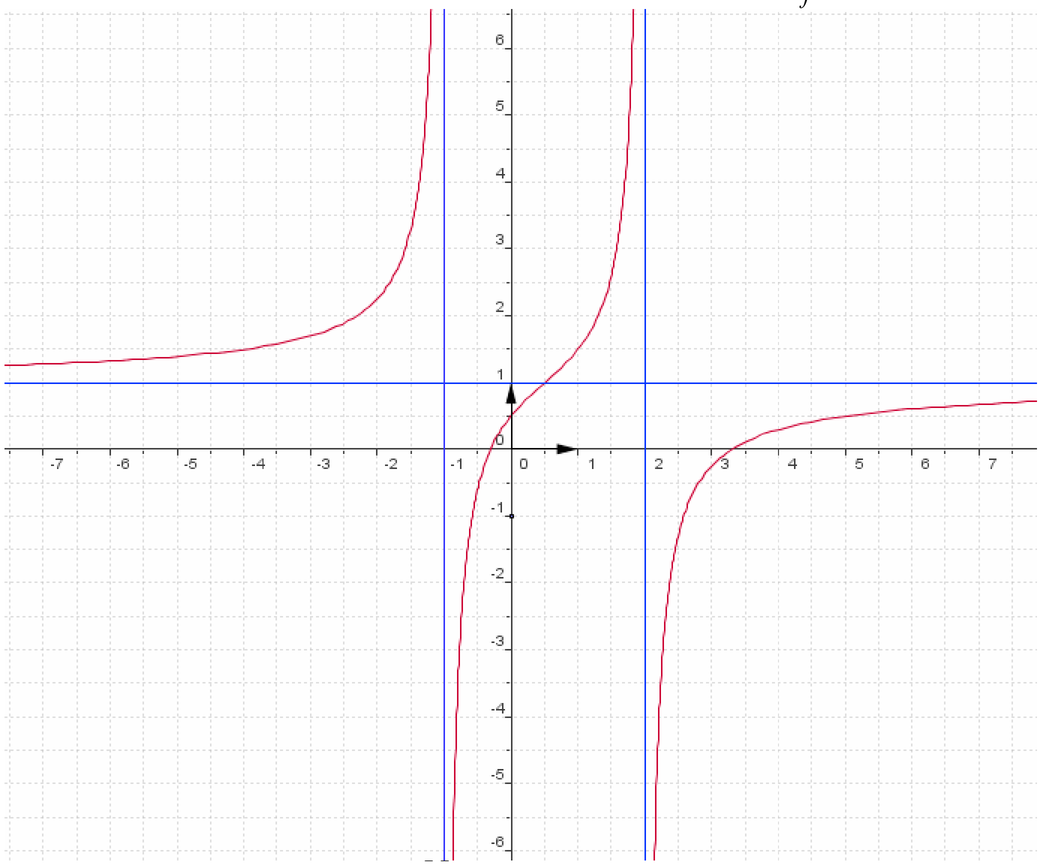
5- أ- ندرس الفروع اللانهائية

لدينا $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} f(x)=1$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى C_f

لدينا ومنه $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} f(x)=+\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى C_f

لدينا $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto -1^-} f(x)=+\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى C_f

ب- ننشئ المنحنى C_f



تمرين3

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

1- حدد D_f و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2- أ- بين أن f دالة دورية و حدد دورها

ب تأكد أن f زوجية استنتج D_E مجموعة دراسة f

3- أدرس تغيرات f على D_E

4- أنشئ المنحنى C_f

الجواب

$$f(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

5- نحدد D_f و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f \Leftrightarrow \cos x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$

اذن $D_f=\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

6- أ- نبين أن f دالة دورية و حدد دورها

$x-2\pi\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\} \quad 2\pi+x\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\} \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

$f(x+2\pi)=\dfrac{1+\cos(x+2\pi)}{1-\cos(x+2)}=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=f(x)$ اذن f دالة دورية و حدد دورها 2π

ب- نتأكد أن f زوجية نستنتج D_E مجموعة دراسة f

$-x\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\} \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

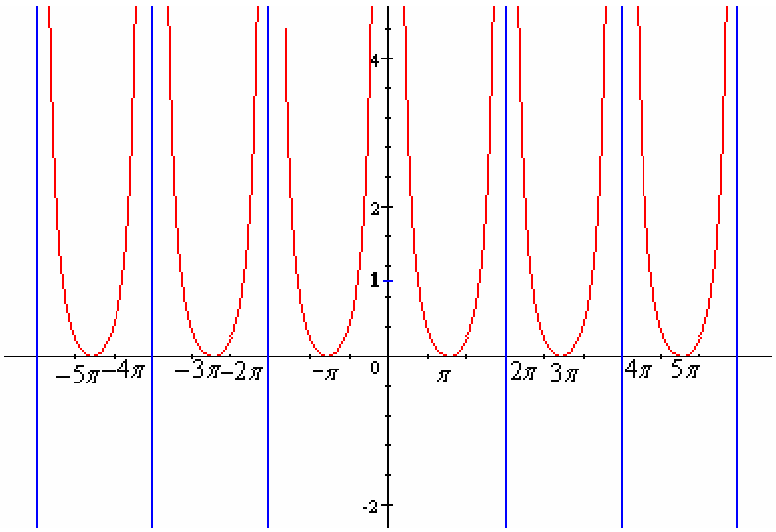
$f(-x)=\dfrac{1+\cos(-x)}{1-\cos(-x)}=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=f(x)$ إذن f زوجية ومنه $D_E=]0;\pi]$

7- ندرس تغيرات f على D_E

$$\forall x\in]0;\pi] \quad f'(x)=\frac{(-\sin x)(1-\cos x)-(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}=\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

x	0	π
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

8- أنشئ المنحنى C_f



R

تمرين4

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ) حدد D_f

ب) بين أن f دالة فردية

د) بين أن f دورية دورها 2π

ج) بين $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ ثم حدد $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

2- أ) بين أن $f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$ $\forall x\in]0;\pi[$

ب) أدرس تغيرات f على $]0;\pi[$ و أعط جدول تغيراتها

3- أ) حدد تقعر (C_f)

ب) أنشئ (C_f)

الجواب

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

2- أ) نحدد D_f

$$D_f=\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$$

ب) نبين أن f دالة فردية

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$: $-x\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(-x)=\frac{1-\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{1-\cos x}{-\sin x}=-=\frac{1-\cos x}{\sin x}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

د) نبين أن f دورية دورها 2π

$x+2\pi\in\mathbb{R}-\{k\ \ /k\in\mathbb{Z}\}$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(x+2\pi)=\frac{1-\cos(x+2\pi)}{\sin(x+2\pi)}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=f(x)$$

f دورية دورها 2π

ملاحظة: بما أن f دورية دورها 2π و f دالة فردية فان مجموعة الدراسة هي $D_E=]0;\pi[$

ج) نبين $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ ثم نحدد $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+} x\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}=0\times\frac{\frac{1}{2}}{1}=0$$

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=+\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=\pi$ مقارب للمنحنى (C_f)

2- أ) نبين أن $f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$ $\forall x\in]0;\pi[$

$$\forall x\in]0;\pi[\quad f'(x)=\frac{\sin^2 x-(1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{1+\cos x}$$

ب) ندرس تغيرات f على $]0;\pi[$ و نعطي جدول تغيراتها

$f'(x) \succ 0 \quad \forall x \in]0;\pi[$ لأن $1+\cos x \succ 0 \quad \forall x \in]0;\pi[$

ومنه f تزايدية على $]0;\pi[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
f	$0 \nearrow +\infty$

3- أ) نحدد تقعر (C_f)

لدينا $\forall x \in]0;\pi[\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$

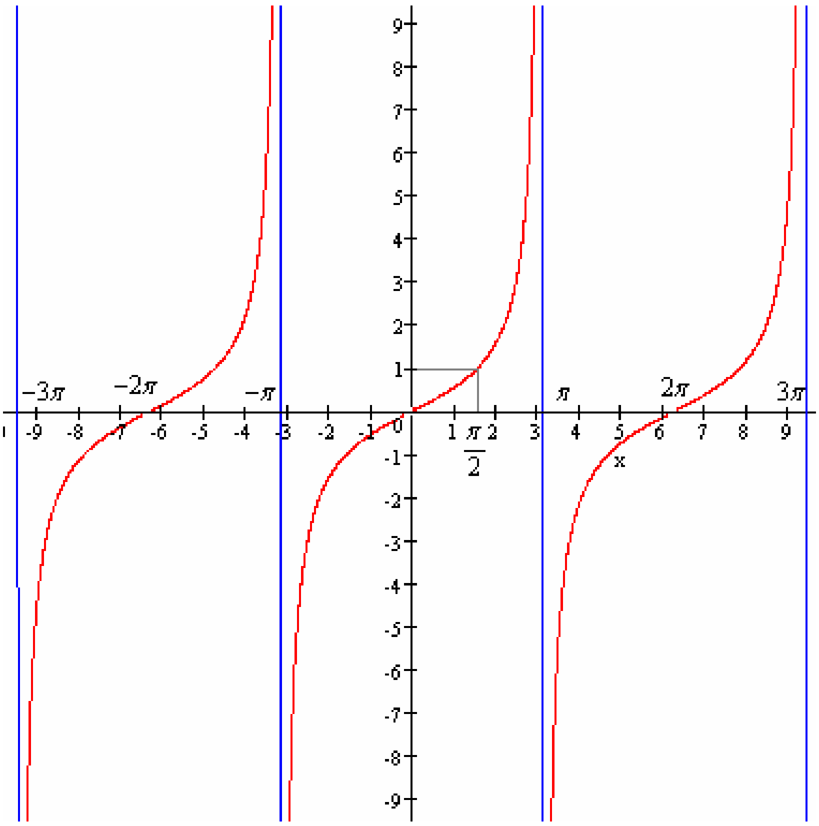
$$\forall x \in]0;\pi[\quad f''(x) = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
$f''(x)$	$+$

إذن (C_f) محدب على $]0;\pi[$ و حيث f فردية فان (C_f) مقعر على $]-\pi;0[$

وبما أن f دورية دورها 2π فان (C_f) محدب على كل مجال من شكل $]2k\pi;\pi+2k\pi[$ و مقعر على $]-\pi+2k\pi;2k\pi[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

ب) ننشئ (C_f)



R

تمارين للعلوم رياضية

تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1} & |x|\succ 1 \end{cases}$$

1- أ) أدرس اتصال في النقطتين 1 و -1

ب) أدرس اشتقاق f في النقطتين 1و -1 و أول النتائج هندسيا

2- أ) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;1[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

ب) أدرس تغيرات f

3- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم الوضع النسبي لـ C_f و مقاربه.

5- أدرس تقعر C_f

6- أنشئ C_f

الجواب

$$\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1} & |x|\succ 1 \end{cases}$$

4- أ) ندرس اتصال في النقطتين 1 و -1

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}=1$ و $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} x-\sqrt{1-x^2}=1$

ومنه $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)$ اذن f متصلة في 1

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}=-1$ و $\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+} x-\sqrt{1-x^2}=-1$

ومنه $\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^-} f(x)=f(-1)$ اذن f متصلة في -1

ب) ندرس اشتقاق f في النقطتين 1و -1 و نؤول النتائج هندسيا

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-\sqrt{1-x^2}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}1+\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}\sqrt{x+1}=\lim_{x\to1^-}1+\sqrt{\frac{1}{1-x}}\sqrt{x+1}=+\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق على يسار1 و منحنى f يقبل نصف مماس عمودي على يسار 1

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2}+\frac{\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2}+\frac{-x+1}{2(x^2+1)}=\frac{1}{2}$$

ومنه f تقبل الاشتقاق على يمين1 و منحنى f يقبل نصف مماس معامله الموجه $\frac{1}{2}$على يمين 1

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x-\sqrt{1-x^2}+1}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\sqrt{1-x}=\lim_{x\to-1^+}1-\sqrt{\frac{1}{1+x}}\sqrt{1-x}=-\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق على يمين -1 و منحنى f يقبل نصف مماس عمودي على يمين -1

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}+1}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{2}+\frac{\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{2}+\frac{x+1}{2(x^2+1)}=\frac{1}{2}$$

ومنه f تقبل الاشتقاق على يسار-1 و منحنى f يقبل نصف مماس معامله الموجه $\frac{1}{2}$على يسار -1

R

5- أ) نحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;1[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$$\forall x\in]-1;1[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{x^2+1-2x^2}{x^2+1}=\frac{2}{2(x^2+1)}=\frac{1}{x^2+1}$$

ب) ندرس تغيرات f

لدينا $\forall x\in]-1;1[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\sqrt{1-x^2}}$

$$\forall x\in[0;1[\quad f'(x)\succ 0$$

$$\forall x\in]-1;1[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\sqrt{1-x^2}}$$

إشارة $f'(x)$ على $]-1;0[$ هي إشارة $1-2x^2$ على $]-1;0[$

$$x\in]-1;0[\qquad f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه $f'(x)\succ 0 \qquad \forall x\in\left]-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[\qquad f'(x)\le 0 \quad \forall x\in\left]-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$f'(x)=\frac{1}{x^2+1} \qquad \forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ومنه $f'(x)\succ 0 \qquad \forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	-	0	+	‖	+	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	1	↗	$+\infty$

6- ندرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم الوضع النسبي لـ C_f و مقاربه.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}=-\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-\frac{1}{2}x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ ومنه المستقيم (D) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مقارب للمنحنى C_f

$$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\qquad f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{x}{x^2+1}$$

و منه C_f فوق (D) على $]1;+\infty[$ و C_fتحت (D) على $]-\infty;-1[$

5- ندرس تقعر C_f

$f''(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\succ 0 \qquad \forall x\in]-1;1[$ ومنه C_f محدب على $]-1;1[$

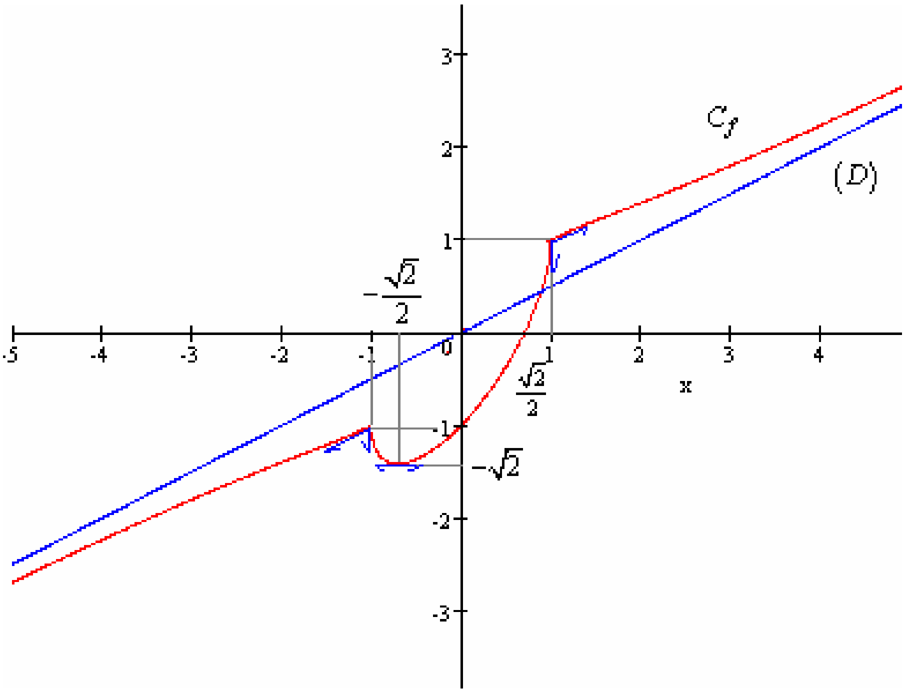
$f''(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad \forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ومنه :

R

$f''(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\prec 0$ $\forall x\in]1;+\infty[$ أي C_f مقعر على $]1;+\infty[$

$f''(x)\succ 0$ $\forall x\in]-\infty;-1[$ أي C_f محدب على $]-\infty;-1[$

6- ننشئ C_f



تمرين2

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$

1- حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2- أ- بين أن 2π دور للدالة f

ب- بين أن $f(x+\pi)=-f(x)$ $\forall x\in D_f$

3- أحسب $f'(x)$

4- أدرس تغيرات f على $[0;\pi]\cap D_f$

5- أنشئ منحنى قصور الدالة f على $[0;2\pi]\cap D_f$

الجواب

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$$

3- نحدد D_f

ليكن $x\in\mathbb{R}$

R

$$x \in D_f \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \quad et \quad \cos x \neq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left(x \neq k\pi \quad et \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad / k \in \mathbb{Z}$$

اذن $D_f = \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

4- أ- بين أن 2π دور للدالة f

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{\sin(x+2\pi)} + \frac{1}{\cos(x+2\pi)} = f(x)$$

إذن 2π دور للدالة f

ب- نبين أن $f(x+\pi) = -f(x)$ $\quad \forall x \in D_f$

$$\forall x \in D_f \qquad f(x+\pi) = \frac{1}{\sin(x+\pi)} + \frac{1}{\cos(x+\pi)} = \frac{1}{-\sin x} + \frac{1}{-\cos} = -f(x)$$

3- نحسب $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \cos x \cdot \sin x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)\left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

4- ندرس تغيرات f على $[0;\pi] \cap D_f$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x - \cos x$

$$x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\qquad \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		-	0	+	‖	+	
f	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

5- ننشئ منحنى قصور الدالة f على $[0;2\pi] \cap D_f$

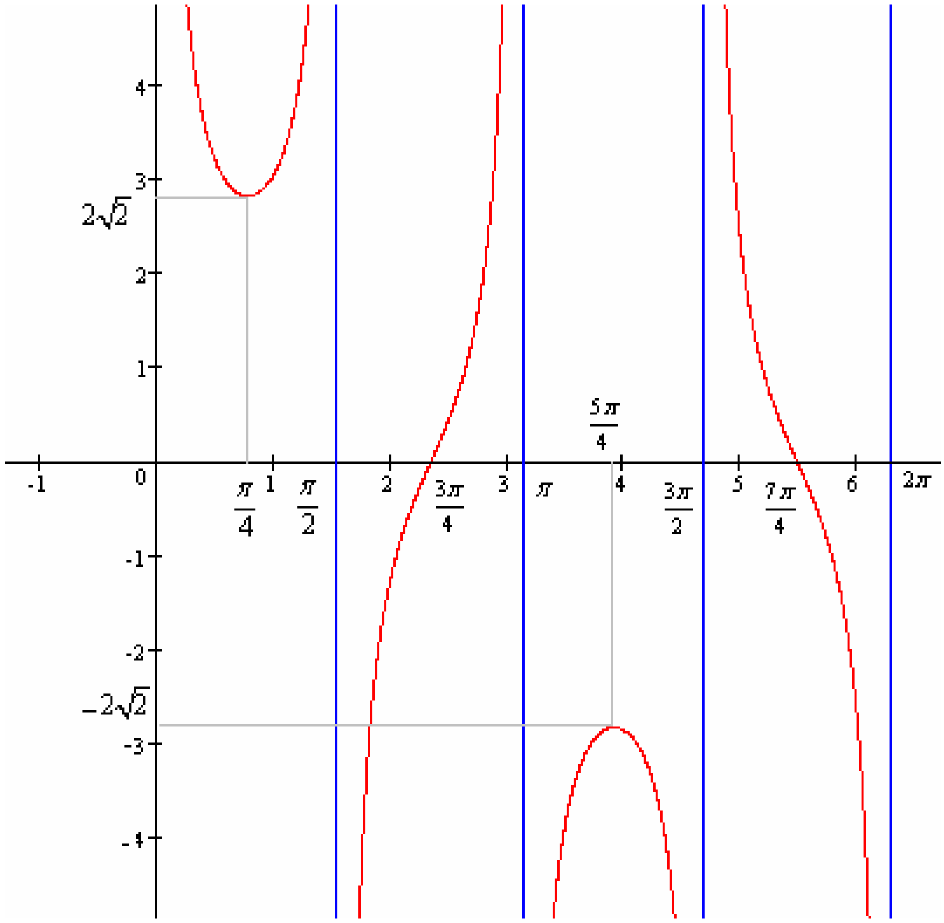
$\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = \pi$ مقارب للمنحنى C_f

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى C_f

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى C_f

ننشئ C_f على $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ و نستنتج الجزء الأخر على $\left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$ حيث $f(x+\pi) = -f(x)$

R


4
3
$2\sqrt{2}$
2
1
-1
-2
$-2\sqrt{2}$
-3
-4
-1
0
$\frac{\pi}{4}$
1
$\frac{\pi}{2}$
2
$\frac{3\pi}{4}$
3
π
$\frac{5\pi}{4}$
4
$\frac{3\pi}{2}$
5
$\frac{7\pi}{4}$
6
2π

R

تمارين: دراسة الدوال

تمرين1

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=|x|-\frac{x}{x^2-1}$

1- أ- حدد D_f و $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$

ب- حدد نهاية f عند 1 و 1- و أو ل النتائج هندسيا

2- أدرس اشتقاق في 0 و أول النتيجة هندسيا

3- أ- حدد $f'(x)$ لكل x من $D_f-\{0\}$

ب- أدرس تغيرات f

4- حدد معادلة المماس لـ C_f في النقطة ذات الافصول 2

5- أ- حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x$ و أول النتيجتين هندسيا

ب- أنشئ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم المنحنى C_f

تمرين2

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{2}x-2+\frac{2}{x}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ) حدد D_f

ب) حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ج) حدد $\lim_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

2- أ) بين أن $f'(x)=\frac{x^2-4}{2x^2} \quad \forall x\in D_f$

ب) أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

3- حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 1

4- بين أن النقطة $A(0;-2)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

5- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- أنشئ (C_f)

تمرين3

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{x^2-1} & x\geq 0 \\ f(x)=\frac{x^2-1}{x} & x\prec 0 \end{cases}$$

2- أ- حدد D_f و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب- حدد نهاية f عند 1 و$+\infty$ و أو ل النتائج هندسيا

ج- حدد نهاية f على يمين ثم على يسار 0

2- أدرس الاشتقاق في 0 على اليمين و أول النتيجة هندسيا

3- أ- حدد $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;0[$ ثم لكل x من $]1;+\infty[\cup]0;1[$

R

ب- أدرس تغيرات f

4- حدد معادلة المماس لـ C_f في النقطة ذات الافصول 1-

5- أ- حدد $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x$ و أول النتيجة هندسيا

ب- أنشئ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم لمنحنى C_f

تمرين4

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=1+\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$

1- حدد D_f و حدد نهايات f عند محدات D_f

2- حدد $f'(x)$ لكل x من D_f

3- أدرس تغيرات f

4- أ- بين أن C_fيقبل $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف.

ب- بين أن $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

د- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

5- أ- أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ المنحنى C_f

تمرين5

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=4\sin x+\cos 2x$

1- بين أن f دالة دورية و حدد دورها

2- حدد $f'(x)$ لكل x من $[0;2\pi[$

3- أدرس تغيرات f على $[0;2\pi[$

4- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول0

5- حدد نقط انعطاف المنحنى C_f على $[0;2\pi[$

6- أنشئ المنحنى C_f

تمرين6

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

1- حدد D_f و $\lim_{x\to0} f(x)$

2- أ- بين أن f دالة دورية و حدد دورها

ب تأكد أن f زوجية استنتج D_E مجموعة دراسة f

3- أدرس تغيرات f على D_E

4- أنشئ المنحنى C_f

تمرين7

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$

1- حدد D_f

2- أ- بين أن f دالة دورية و حدد دورها

ب تأكد أن f زوجية استنتج D_E مجموعة دراسة f

3- أدرس تغيرات f على D_E

4- أنشئ المنحنى C_f

R

تمرين8

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ) حدد D_f

ب) بين أن f دورية دورها 2π

د) بين أن f دالة فردية و استنتج مجموعة الدراسة

ج) حدد $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to \pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجتين هندسيا

2- أ)أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0;\pi[$

ب) أدرس تغيرات f على $]0;\pi[$ و أعط جدول تغيراتها

3- أنشئ (C_f) على $D_f\cap[-3\pi;3\pi]$

المتجهات في الفضاء

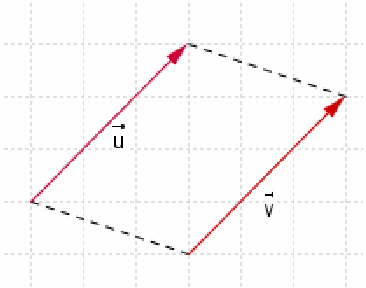
I)- تساوي متجهتين – جمع المتجهات

1- عناصر متجهة

A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء، إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان :

- اتجاه $\vec{u}$ هو اتجاه المستقيم (AB)
- منحى $\vec{u}$ هو المنحى من A إلى B
- منظم $\vec{u}$ هي المسافة AB و نكتب: $AB = \|\vec{u}\|$

ملحوظة: لكل نقطة A من الفضاء المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم.
$\overrightarrow{AA}$ تسمى المتجهة المنعدمة و نكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

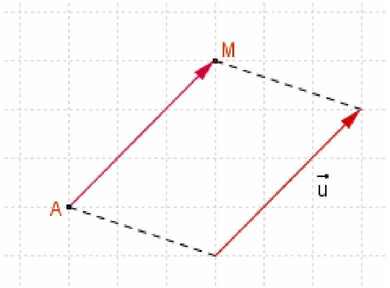


$\vec{u} = \vec{v}$

2- تساوي متجهتين

تعريف

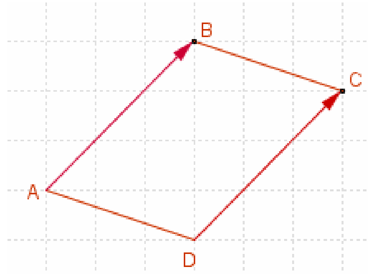
تكون متجهتان متساويتان اذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم



لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء و لكل نقطة A في الفضاء
توجد نقطة وحيدة M حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

خاصية

$ABCD$ رباعيا في الفضاء
$ABCD$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

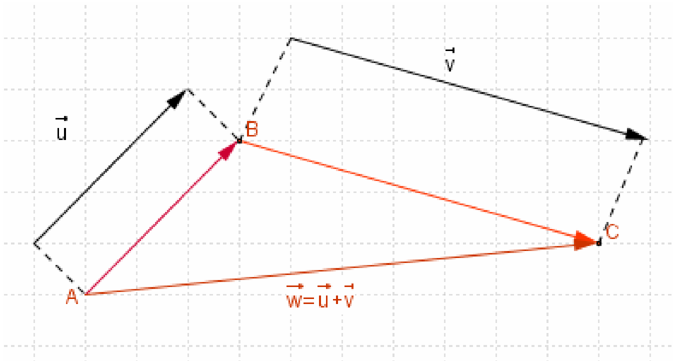


خاصية

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (تبديل الوسطين)
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$ (تبديل الطرفين)

3- مجموع متجهتين –علاقة شال

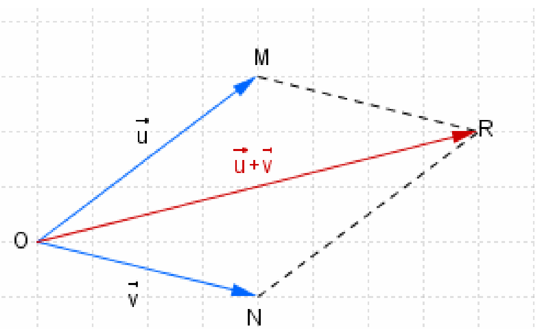
أ- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان في الفضاء
لتكن A نقطة من الفضاء.
توجد نقطة وحيدة B حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
توجد نقطة وحيدة C حيث $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
النقطتان A و C تحددان متجهة
وحيدة $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$



المتجهة $\vec{w}$ هي مجموع المتجهتين
$\vec{u}$ و $\vec{v}$
نكتب $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

ب- علاقة شال

مهما كانت النقط A و B و C من الفضاء $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



نتيجة

لتكن O و NوM و R أربع نقط من الفضاء
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$ إذا وفقط إذا كان $OMRN$ متوازي الأضلاع

ملاحظة: اذا كانت $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ فان
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$ حيث $OMRN$ متوازي الأضلاع

ج- خاصيات

-* لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
-* لكل ثلاث متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ $\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
-* لكل متجهة $\vec{u}$ $\quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

مقابل متجهة - فرق متجهتين

أ- مقابل متجهة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة في الفضاء
مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاها مضاد لمنحى المتجهة $\vec{u}$ نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$

-* لكل متجهة $\vec{u}$: $\quad \vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

* لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$
المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متقابلتان نكتب $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

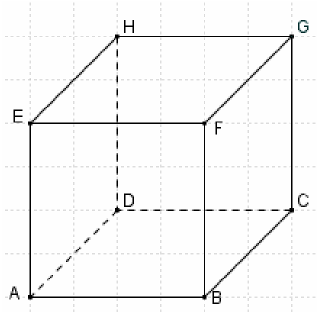
ب- فرق متجهتين

تعريف

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

ملاحظة لكل ثلاث نقط A و B و C $\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

أمثلة



$ABCDEFGH$ مكعب

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HG}$ $\qquad \overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{HE}$ $\qquad \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}$

4- منتصف قطعة

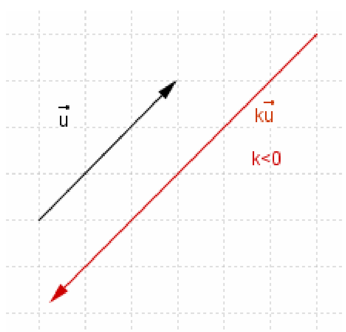
I منتصف $[AB]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ $\quad (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0})$

II) الاستقامية – التعريف المتجهي للمستقيم

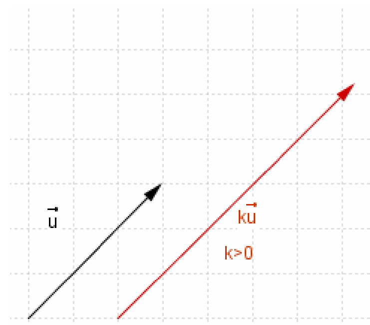
1- ضرب متجهة في عدد حقيقي

تعريف

$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم
جداء المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث :
* $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه
* $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$
* منحى $k\vec{u}$ هو
  منحى $\vec{u}$ إذا كان $k \succ 0$
  عكس منحى $\vec{u}$ إذا كان $k \prec 0$



$k \prec 0$



$k \succ 0$

* لكل متجهة $\vec{u}$ و لكل عدد حقيقي k : $\quad 0\cdot\vec{u}=\vec{0}$ و $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$

2 - خاصيات

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و مهما يكن العددان الحقيقيان α و β فان

$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ $\quad \beta \quad$ $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+ \quad \vec{v}$

$1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ $\quad \beta \quad$ $(\alpha\beta)\vec{u}=\alpha(\quad \vec{u})$

$\alpha\vec{u}=\vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$

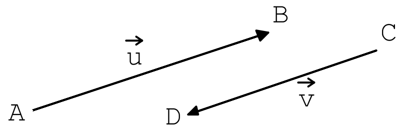
R

3- الاستقامية

استقامية متجهتين

أ- تعريف

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا و فقط كانت احداهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



ملاحظة

$\vec{0}$ مستقيمية مع أية متجهة

استقامية ثلاث نقط

تعريف

لتكن A و B و C نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$

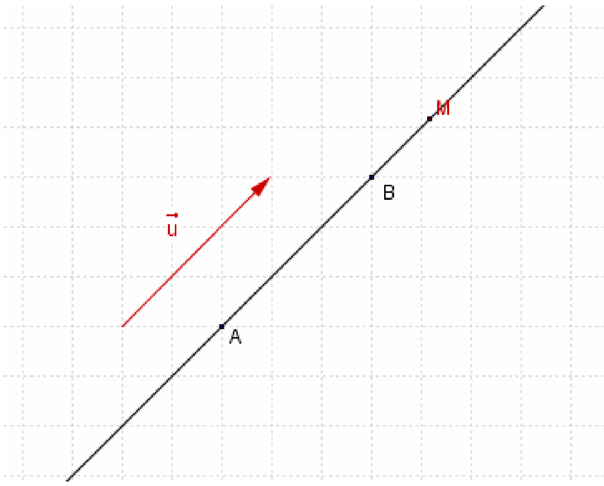
تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$

توازي مستقيمين

لتكن A و B و C و D نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

$(AB)//(CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين

التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء



تعريف

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء

كل متجهة $\vec{u}$ غير منعدمة و مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{AB}$

تسمى متجهة موجهة للمستقيم (AB)

خاصية

لتكن A نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

هي المستقيم المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$. نرمز له بالرمز

$D(A;\vec{u})$

$$D(A;\vec{u}) = \{M \in (E) / \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

تمرين

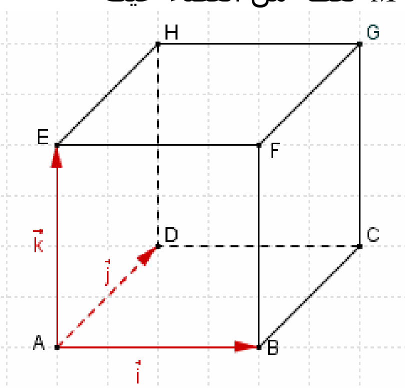
ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا نضع $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$

و $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$ و $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. نعتبر I منتصف $[HG]$

1- بين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

2- ليكن المستقيم (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) و M نقطة من الفضاء حيث

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG}$. بين أن $M \in (\Delta)$



الجواب

1- نبين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

أي نبين أن $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

لدينا I منتصف $[HG]$ ومنه $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$$

بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} = \vec{j}$ و $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} = \vec{i}$

ومنه $\overrightarrow{AI} = \vec{k} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{1}{2}\vec{u}$

إذن $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان و منه $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

2 نبين أن $M \in (\Delta)$

لدينا (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) أي $(\Delta) = D(G;\vec{u})$

$$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CG}$$

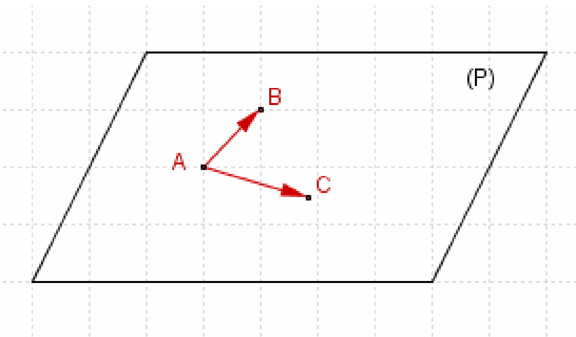
بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\overrightarrow{GF}=-\overrightarrow{AD}=-\vec{j}$ و $\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{AE}=-\vec{k}$ و $\overrightarrow{CG}=\vec{k}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{j}$

$$\overrightarrow{GM}=-\vec{j}-\vec{k}+\frac{1}{2}i+2\vec{j}+2\vec{k}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\frac{1}{2}\left(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}$$

و بالتالي $M\in D(G;\vec{u})$ إذن $M\in(\Delta)$

III) الاستوائية– التعريف المتجهي للمستوى

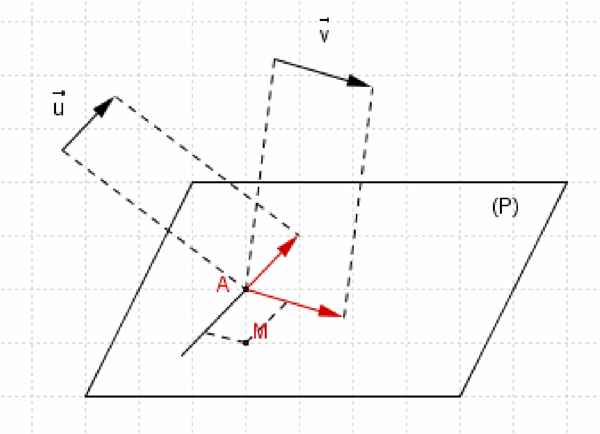
1- تعريف



ليكن (P) مستوى من الفضاء و A و B و C نقط غير مستقيمية من المستوى (P)

نقول إن (P) هو المستوى المار من A و الموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

نتيجة



متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و نقطة من الفضاء تحدد مستوى وحيدا (P) هو المستوى المار من النقطة A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نرمز له بالرمز $P(A;\vec{u};\vec{v})$.

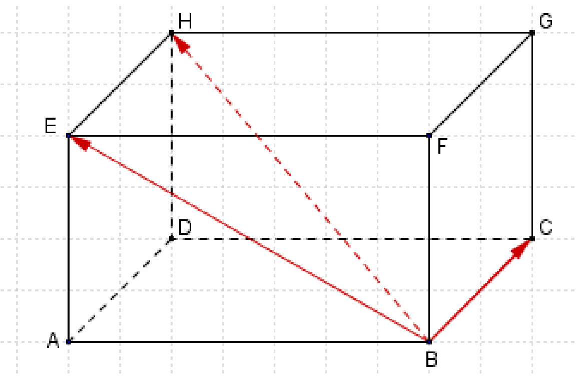
خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و A نقطة من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ و $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ هي المستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و نكتب $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$

2- الاستوائية

تعريف



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات في الفضاء
نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية اذا وفقط وجدت أربع نقط مستوائية A و B و C و D حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

أمثلة

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات

$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$ مستوائية لان النقط B و C و E و H مستوائية $\left[(BC)//(EH)\right]$

$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مستوائية لأن $BDEH$ رباعي الأوجه

خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و $\vec{w}$ متجهة في الفضاء
المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

نتيجة

إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ فان A و B و C و M مستوائية

تمرين

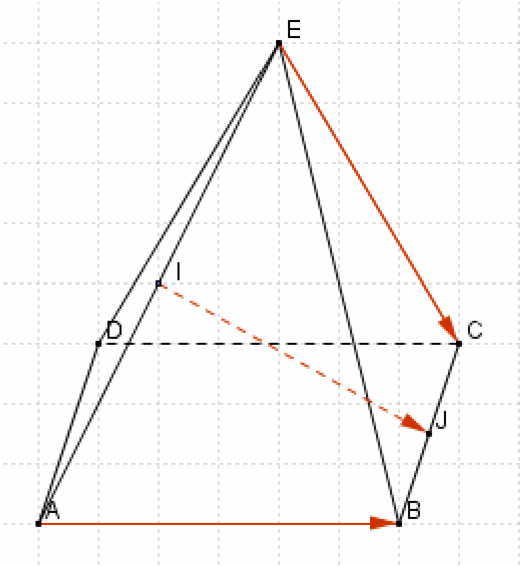
$EABCD$ هرم قاعدته المستطيل $ABCD$، I و J منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ على التوالي.

بين أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية

الحل

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$$

و حيث I و J منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ فان :



$\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

و بالتالي $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ومنه $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

إذن $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية

تحليلية الفضاء

1- إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم، إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس

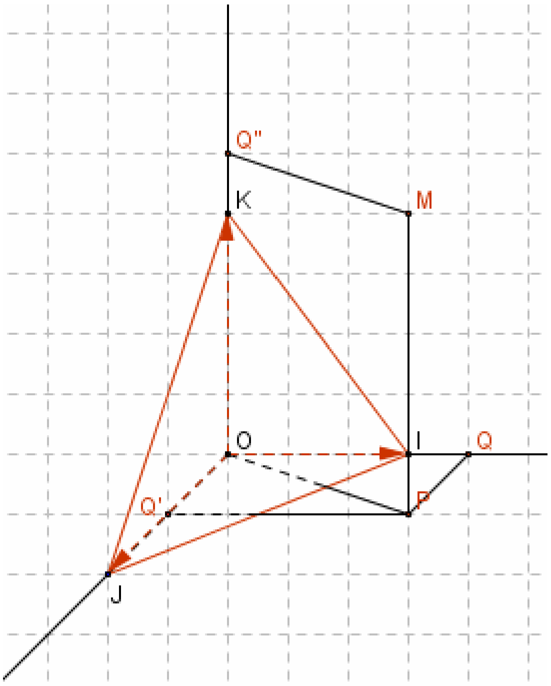
أ/ الأساس - المعلم في الفضاء

نشاط ليكن $OIJK$ رباعي الأوجه و M نقطة من الفضاء و P مسقطها على المستوى (OIJ) بتوازٍ مع (OK) و Q مسقط P على (OI) بتوازٍ مع (OJ) و Q' مسقط P على (OJ) بتوازٍ مع (OI) و Q'' مسقط M على (OK) بتوازٍ مع (OIJ)

1- أنشئ الشكل

2- باعتبار x أفصول Q بالنسبة للمعلم $(O;I)$ و y أفصول Q' بالنسبة للمعلم $(O;J)$ و z أفصول Q'' بالنسبة للمعلم $(O;K)$

أكتب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة x و y و $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OK}$



1- الشكل

2- نكتب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة x و y و $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OK}$

لدينا Q مسقط P على (OI) بتوازٍ مع (OJ)

و Q' مسقط P على (OJ) بتوازٍ مع (OI)

ومنه $(OQPQ')$ متوازي الأضلاع و بالتالي $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OQ'}$

و حيث x أفصول Q بالنسبة للمعلم $(O;I)$

و y أفصول Q' بالنسبة للمعلم $(O;J)$

فان $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OQ'}=y\overrightarrow{OJ}$

ومنه $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$

لدينا Q'' مسقط M على (OK) بتوازٍ مع (OIJ)

و P مسقطها على المستوى (OIJ) بتوازٍ مع (OK)

ومنه $(OPMQ'')$ متوازي الأضلاع ومنه $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ''}$

و حيث أن z أفصول Q'' بالنسبة للمعلم $(O;K)$ فان $\overrightarrow{OQ''}=z\overrightarrow{OK}$

إذن $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}+z\overrightarrow{OK}$

و بما أن $OIJK$ رباعي الأوجه فان I و J و K و O غير مستوائية

نقول إن المثلوث $(x;y;z)$ إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ نكتب $M(x;y;z)$

تعريف

إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائية و O نقطة من الفضاء.

نقول إن المثلوث $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساس للفضاء، و أن المربوع $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم للفضاء

ملاحظة:

أربع نقط غير مستوائية O و A و B و C تحدد أساسا مثلا $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

و معلما للفضاء مثلا $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

خاصية

ليكن $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلما في الفضاء

لكل نقطة M من الفضاء توجد ثلاثة أعداد حقيقية وحيدة x و y و z حيث $\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$

المثلوث $(x;y;z)$ يسمى إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نكتب $M(x;y;z)$

لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء توجد ثلاثة أعداد حقيقية وحيدة x و y و z حيث $\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$

المثلوث $(x;y;z)$ يسمى إحداثيات $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نكتب $\vec{u}(x;y;z)$

R

ب/ إحداثيات $\vec{u}+\vec{v}$ و $\lambda\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ و منتصف قطعة

خاصية

لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين من الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و λ عددا حقيقيا

* $\vec{u}=\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$
* $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y';z+z')$
* $\lambda\vec{u}(\lambda x;\lambda y;\ z)$

خاصية

لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى لمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و I منتصف القطعة $[AB]$

* مثلوث إحداثيات $\overrightarrow{AB}$ هو $(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_B)$
* مثلوث إحداثيات I هو $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

2- الشرط التحليلي لاستقامية متجهتين

نشاط

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين من الفضاء

أ/ بين أنه إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $ab'-a'b=0$ و $bc'-b'c=0$ و $ac'-a'c=0$

ب/ بين أنه إذا كان $ab'-a'b=0$ و $bc'-b'c=0$ و $ac'-a'c=0$ فان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين من الفضاء

* تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}=0$
* تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$

الأعداد الحقيقية $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ تسمى المحددات المستخرجة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

ملاحظة

يمكن أن نحصل على المحددات المستخرجة بالتقنية التالية

$$\begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{a'} \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} \rightarrow d_1=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & a' \\ \cancel{b} & \cancel{b'} \\ c & c' \end{pmatrix} \rightarrow d_2=\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ \cancel{c} & \cancel{c'} \end{pmatrix} \rightarrow d_3=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

3- المتجهات المستوائية

نشاط

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1- نفترض أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية.

أ/ بين أنه يوجد زوج $(x;y)$ من $\mathbb{R}^2$ حيث $\begin{cases} a=x\cdot a'+y\cdot a'' \\ b=x\cdot b'+y\cdot b'' \\ c=x\cdot c'+y\cdot c'' \end{cases}$

ب/ بين أن $a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}=0$

2- أكتب النتيجة العكسية لنتيجة السؤال 1 . لنقبلها

هل المتجهات $\vec{u}(1;2;3)$ و $\vec{v}(2;0;1)$ و $\vec{w}(3;1;3)$ مستوائية.

R

أ- محددة ثلاث متجهات

تعريف

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و$\vec{w}(a";b";c")$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

العدد $a\begin{vmatrix} b' & b" \\ c' & c" \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a" \\ c' & c" \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a" \\ b' & b" \end{vmatrix}$ يسمى محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ نرمز له $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

أو بـ $\begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix}$ نكتب $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b" \\ c' & c" \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a" \\ c' & c" \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a" \\ b' & b" \end{vmatrix}$

ملاحظة

d_1 و d_2 و d_3 المحددات المستخرجة من $\vec{v}$ و $\vec{w}$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix} = ad_1 - bd_2 + cd_3$$

ب- مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و$\vec{w}(a";b";c")$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq \vec{0}$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \vec{0}$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر النقط $A(2;2;4)$ و $B(2;1;3)$ و $C(1;-1;0)$

و $D(-1;2;1)$ و المتجهات $\vec{u}(-1;2;1)$ و $\vec{v}(1;-3;2)$ و$\vec{w}(-1;1;4)$

1- أدرس استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2- أدرس استوائية $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

3- أدرس استوائية النقط A و B و C و D

تمرين

في الفضاء V_3 المنسوب إلى أساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر $\vec{u}(m;2;1-m)$

و $\vec{v}(2m+1;2;-2m+3)$ حيث m بارامتر حقيقي

1- بين أن مهما كانت m من $\mathbb{R}$: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين

2- لتكن $\vec{w}(1;-2;1)$ ، بين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية

4- تمثيل بارامتري لمستقيم- معادلتان ديكارتيان لمستقيم في الفضاء

أ- تمثيل بارامتري لمستقيم

في الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$

و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$

لتكن $M(x;y;z)$ من الفضاء

$M \in (D)$ تكافئ $\exists t \in \mathbb{R} / \quad \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$

تكافئ $t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \lambda t \end{cases}$

R

تعريف

الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. لتكن $A(x_0;y_0;z_0)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ متجهة غير منعدمة

النظمة $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x = x_0+\alpha t \\ y = y_0+\beta t \\ z = z_0+\lambda t \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(x_0;y_0;z_0)$

و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$

مثال

$t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \\ z = -2+t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من $A(1;5;-2)$ و موجه ب $\vec{u}(-2;3;1)$

ب- معادلتان ديكارتيان لمستقيم في الفضاء

ليكن (D) مارا من النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة موجهة له

لتكن $M(x;y;z)$ من الفضاء

$M\in(D)$ تكافئ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

تكافئ جميع المحدد المستخرجة من $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ منعدمة

تكافئ $b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$ و $c(x-x_0)-a(z-z_0)=0$ و $c(y-y_0)-b(z-z_0)=0$

الأعداد a و b و c ليست جميعها منعدمة

لنفرض أن $a\neq 0$ و $b\neq 0$ و$c\neq 0$

$M\in(D)$ تكافئ $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

لنفرض أن أحدهما منعدما مثلا $a=0$ و $b\neq 0$ و$c\neq 0$

$M\in(D)$ تكافئ $\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ و $x-x_0=0$

لنفرض أن اثنين منهما منعدمين مثلا $a=0$ و $b=0$ و$c\neq 0$

$M\in(D)$ تكافئ $y-y_0=0$ و $x-x_0=0$

مرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

إذا كان مستقيم (D) مارا من النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة موجهة له فان النظمة:

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ تسمى نظمة معادلتين ديكارتيين للمستقيم (D) إذا كان $a\neq 0$ و $b\neq 0$

و$c\neq 0$ أما إذا كان أحد المعاملات منعدما فان البسط المرتبط به يكون منعدما أيضا.

أمثلة

* المستقيم (D) المار من $A(1;5;-2)$ و موجه ب $\vec{u}(-2;3;1)$

$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-5}{3}=z+2$ معادلتان ديكارتيان للمستقيم (D)

* المستقيم (D') المار من $B(1;-2;2)$ و موجه ب $\vec{u}'(-3;0;2)$

$\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ و $y+2=0$ معادلتان ديكارتيان للمستقيم (D')

* المستقيم (D'') المار من $C(3;2;-5)$ و موجه ب $\vec{u}''(-3;0;0)$

$y-2=0$ و $z+5=0$ معادلتان ديكارتيان للمستقيم (D'')

5 - تمثيل بارامتري لمستوى- معادلة ديكارتية للمستوى

أ/ تمثيل بارامتري لمستوى

في الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.نعتبر (P) المستوى المار من النقطة $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$
و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$

لتكن $M(x;y;z)$ من الفضاء

$M\in(P)$ تكافئ $\exists(t;t')\in\mathbb{R}^2 \,/\, \overrightarrow{AM}=t\cdot\vec{u}+t'\cdot\vec{u}'$

تكافئ $(t;t')\in\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x=x_0+\alpha t+\alpha' t' \\ y=y_0+\beta t+\beta' t' \\ z=z_0+\lambda t+\lambda' t' \end{cases}$

تعريف

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. لتكن $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$ متجهتين غير منعدمتين

النظمة $(t;t')\in\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x=x_0+\alpha t+\alpha' t' \\ y=y_0+\beta t+\beta' t' \\ z=z_0+\lambda t+\lambda' t' \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) المار من $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$

ب- معادلة ديكارتية للمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha & \alpha' \\ y-y_0 & \beta & \beta' \\ z-z_0 & \lambda & \lambda' \end{vmatrix}=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow (x-x_0)\begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix}-(y-y_0)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix}+(z-z_0)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

بوضع $a=d_1$; $b=-d_2$; $c=d_3$ حيث d_1 و d_2 و d_3 المحددات المستخرجة المرتبطتين بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$

نضع $d=-\left(ax_0+by_0+cz_0\right)$

$$M\in(P)\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

مبرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$
للمستوى (P) المار من $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$
معادلة من شكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$
مجموعة النقط $M(x;y,z)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$، مستوى
$ax+by+cz+d=0$ تسمى معادلة ديكارتية للمستوى (P)

مثال

نعتبر المستوى (P) المار من $A(1;-1;0)$ و الموجه بـالمتجهتين $\vec{u}(0;3;2)$ و $\vec{v}(-2;-1,0)$
نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P)

R

لتكن $M(x;y,z)$ من الفضاء

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ y+1 & 3 & -1 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow 2(x-1)+4(y+1)+6z=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow 2x+4y+6z+2=0$$

$2x+4y+6z+2=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P)

6- الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

خاصية

ليكن $(D)=D(A;\vec{u})$ و $(\Delta)=D(B;\vec{v})$ مستقيمين في الفضاء

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و $A\in(\Delta)$ أو $B\in(D)$ فان $(D)=(\Delta)$

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و $A\notin(\Delta)$ فان (D) و (Δ) متوازيان قطعا

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right)=0$ فان (D) و (Δ) متقاطعان

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right)\neq 0$ فان (D) و (Δ) غير مستوائيين

ب- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

مبرهنة

$(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $(Q)=P(B;\vec{u}';\vec{v}')$

- يكون (P) و (P') متوازيين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ مستوائية

أي $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')=0$ و $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')=0$

- يكون (P) و (P') متقاطعان إذا و فقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ غير مستوائية

أي $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')\neq 0$ أ و $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')\neq 0$

خاصيات

$(P): ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

$(P): a'x+b'y+c'z+d'=0$ حيث $(a';b';c')\neq(0;0;0)$

* يكون (P) و (P') متقاطعين إذا وفقط إذا كان $ab'-a'b\neq 0$ أو $bc'-b'c\neq 0$ أو $ac'-a'c\neq 0$

* يكون (P) و (P') متوازيين قطعا إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم t حيث

$a'=ta$; $b'=tb$; $c'=tc$ و $d'\neq td$

* يكون (P) و (P') منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم t حيث

$a'=ta$; $b'=tb$; $c'=tc$ و $d'=td$

ج- الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

مبرهنة_

$(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $(D)=D(B;\vec{u}')$

- يكون (P) و(D) متوازيان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ مستوائية أي $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')=0$
- يكون (P) و(D) متقاطعان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ غير مستوائية أي $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')\neq 0$

ملاحظة

$(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $(D)=D(B;\vec{u}')$ حيث (P) و(D) متوازيان

- إذا كان $B\in(P)$ فان $(D)\in(P)$

R

- إذا كان $B \notin (P)$ فان (D) يوازي (P) قطعا

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(2;1;2)$ و $B(1;0;2)$ و $C(1;2;2)$.

ليكن (D) المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(1;0;2)$ و (P) المستوى الذي معادلته الديكارتية $x+2y-z+3=0$

1- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

2- حدد معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D)

3- تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

4- حدد تمثيلا بارمتريا للمستوى (P)

5- حدد تقاطع (D) و (P)

6- نعتبر المستوى (P') المعرف بالمعادلة الديكارتية $x+y-2z+1=0$

أ- تأكد أن (P) و (P') يتقاطعان

ب- حدد تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) تقاطع (P) و (P') مع إعطاء متجهة موجهة لـ(Δ)

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستويين:

$(P_m):\quad 2x+4y+mz-2=0$

$(P):\quad 2x+4y-z-3=0$

و المستقيم $(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

حيث m بارامتري حقيقي

أدرس حسب قيم m الوضع النسبي للمستويين (P_m) و (P)

أدرس حسب قيم m الوضع النسبي للمستوى (P_m) و المستقيم (D)